Mines de sup 2009 : corrigé

Problème I : Algèbre et Géométrie

A. Étude de deux applications

1. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $f(P) = \frac{1}{2}[a(\frac{X}{2})^2 + b\frac{X}{2} + c + a(\frac{X+1}{2})^2 + b\frac{X+1}{2} + c] = \frac{a}{4}X^2 + \frac{a+2b}{4}X + \frac{a}{8} + \frac{b}{4} + c \in \mathbb{R}_2[X]$ donc f est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.
Par ailleurs soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P + Q) = \frac{1}{2}[\lambda P(\frac{X}{2}) + Q(\frac{X}{2}) + \lambda P(\frac{X+1}{2}) + Q(\frac{X+1}{2})] = \lambda\frac{1}{2}[P(\frac{X}{2}) + P(\frac{X+1}{2})] + \frac{1}{2}[Q(\frac{X}{2}) + Q(\frac{X+1}{2})] = \lambda f(P) + f(Q)$ donc f est linéaire.

2. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X], \lambda \in \mathbb{R}$, alors $\varphi(\lambda P + Q) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$ donc φ est linéaire.

3. $f(1) = 1$ donc la première colonne de la matrice est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(X) = \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}$ donc la deuxième colonne de la matrice est $\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(X^2) = \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}X + \frac{1}{8}$ donc la troisième colonne de la matrice est $\begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

4. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire sans élément nul sur la diagonale donc elle est inversible donc f est bijectif (donc injectif et surjectif).

5. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.
$\varphi(P) = 0 \iff a + b + c = 0 \iff a = -b - c \iff P = (-b-c)X^2 + bX + c = b(X - X^2) + c(1 - X^2)$ donc $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Vect}(X - X^2, 1 - X^2)$.
Vérifions que $(X - X^2, 1 - X^2)$ est libre : soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(X - X^2) + \lambda_2(1 - X^2) = 0$, en évaluant en 0 il vient $\lambda_2 = 0$, il reste $\lambda_1(X - X^2) = 0$ d'où $\lambda_1 = 0$.
Donc $(X - X^2, 1 - X^2)$ est libre : c'est donc une base de $\mathrm{Ker}\varphi$ et $\dim(\mathrm{Ker}\varphi) = 2$.

6. Grâce au théorème du rang, $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 1 = \dim(\mathbb{R})$ donc φ est surjective. Mais $\dim(\mathrm{Ker}\varphi) \neq 0$ donc φ n'est pas injective.

B. Calcul des puissances successives d'une matrice

7. Montrons qu'il s'agit d'une famille libre : soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1.1 + \lambda_2(-2X) + \lambda_3(6X^2 - 6X + 1) = 0$

Il vient $6\lambda_3 X^2 + (-2\lambda_2 - 6\lambda_3)X + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ d'où $\begin{cases} 6\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$

Donc $\mathcal{B}'$ est libre. Puisque $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, c'est une base.

8. Il s'agit de ranger en colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$: $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

9. En effectuant la séquence d'opérations élémentaires $L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2$, $L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ on se ramène à la matrice identité. Donc Q est inversible.

En effectuant les mêmes opérations sur la matrice identité on arrive à $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$

10. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} f = Q^{-1}.\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f.Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

11. Par propriété des matrices diagonales, $(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} f)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix}$ puis (par une récurrence facile)

$A^n = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f)^n = Q.(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} f)^n Q^{-1} =$ (après calcul) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n}) & \frac{1}{6}(2 + \frac{1}{4^n} - \frac{3}{2^n}) \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$

12. Les coordonnées de $f^n(P)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f)^n.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

D'où $f^n(P) = a + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^n})b + (\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\frac{1}{4^{2n}} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^n})c + (\frac{1}{2^n}b + (\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n})c)X + c\frac{1}{4^n}X^2$

13. $\varphi(f^n(P)) = (f^n(P))(0) = a + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^n})b + (\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\frac{1}{4^{2n}} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^n})c$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la quantité précédente on obtient $a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$ ce qui vaut $\displaystyle\int_0^1 P$.

C. Une autre preuve du résultat précédent

14. On fixe $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Pour $n = 0$ il vient $\frac{1}{2^0}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^0-1} P(\frac{X+k}{2^0}) = P(X) = Id(P) = f^0(P)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $f^n(P) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} P(\frac{X+k}{2^n})$. Alors :

$$f^{n+1}(P) = f^n(f(P)) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{2^n-1} P(\frac{\frac{X+k}{2^n}}{2}) + P(\frac{\frac{X+k}{2^n}+1)}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{2^n-1} P(\frac{X+k}{2^{n+1}}) + \sum_{k=0}^{2^n-1} P(\frac{X+k+2^n}{2^{n+1}})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{2^n-1} P(\frac{X+k}{2^{n+1}}) + \sum_{k=2^n}^{2^n+2^n-1} P(\frac{X+k}{2^{n+1}})\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} P(\frac{X+k}{2^{n+1}})\right]$$

donc par récurrence la proposition est prouvée.

15. Rappelons le théorème de convergence des sommes de Riemann : si P est continue sur le segment $[a, b]$ alors $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} P(a + k\frac{b-a}{n}) = \int_a^b P(t)\mathrm{d}t$.

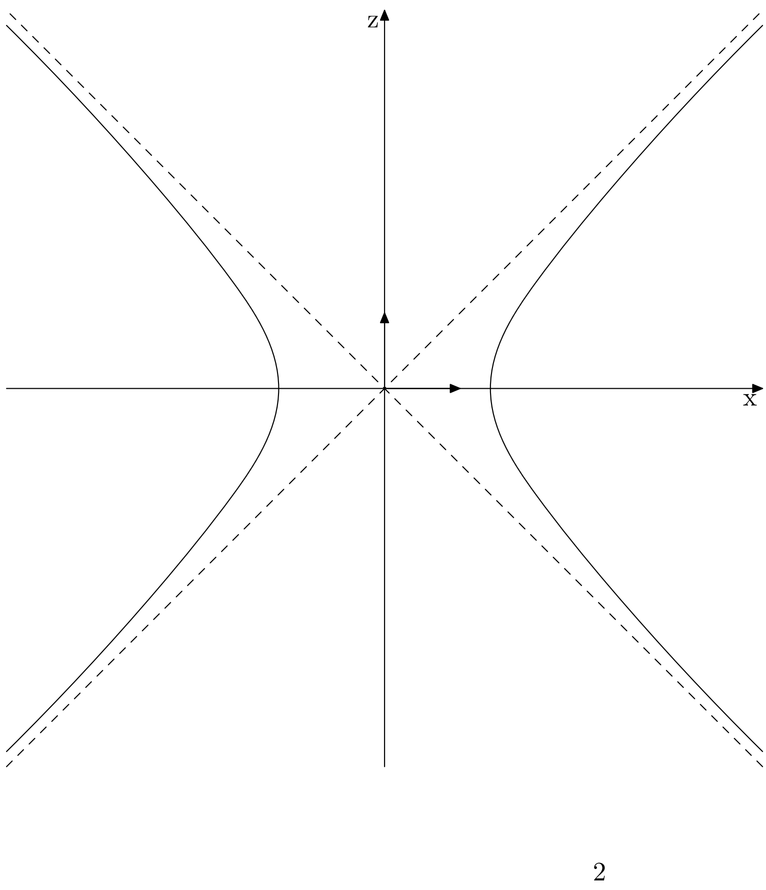
Ici $\varphi(f^n(P)) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} P(k/2^n)$: on pose $a = 0$, $b = 1$, $N = 2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on peut appliquer le théorème précédent car $x \mapsto P(x)$ est continue (car polynomiale).

D. Étude d'une famille de sphères et d'une famille de droites

16. L'équation de $\mathcal{E}$ peut se réécrire $x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2}m)^2 = 2 + m^2$, il s'agit d'un sphère dont le centre a pour coordonnées $(0, 0, \sqrt{2}m)$ et qui a pour rayon $\sqrt{2 + m^2}$.

17. G a pour équation (dans le plan $\mathcal{P}$) $x^2 - z^2 = 2$, il s'agit d'une hyperbole équilatère, dont les asymptotes ont pour équation $x = z$ et $x = -z$ dans le plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$

18.



19. G est équilalère donc son excentricité est $\sqrt{2}$. Par ailleurs, $a = b = \sqrt{2}$ donc $c = \sqrt{a^2+b^2} = 2$ donc les foyers ont pour coordonnées $(2,0)$ et $(-2,0)$ dans le plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire $(2,0,0)$ et $(-2,0,0)$ dans l'espace.

20. Choix d'un point : on prend $z = 0$ donc la droite (D_θ) passe par M_θ de coordonnées $(\sqrt{2}\sin\theta, -\sqrt{2}\cos\theta, 0)$.
Choix d'un vecteur directeur : la direction de (D_θ) vérifie l'équation $\begin{cases} x - z\cos\theta = 0 \\ y - z\sin\theta = 0 \end{cases}$ donc on choisit le vecteur directeur $\overrightarrow{u}_\theta$ de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta, 1)$.

21. La droite (D_θ) est tangente à la sphère S_m si et seulement si la distance du centre Ω_m de la sphère à la droite est égale au rayon de la sphère.
$\mathrm{d}(\Omega_m, D_\theta) = \dfrac{\|\overrightarrow{M_\theta\Omega_m} \wedge \overrightarrow{u}_\theta\|}{\|\overrightarrow{u}_\theta\|} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{(\cos\theta - m\sin\theta)^2 + (m\cos\theta + \sin\theta)^2 + 1}}{\sqrt{2}} = \sqrt{m^2+2}$ ce qui est le rayon de la sphère donc la sphère et la droite sont bien tangentes.

22. La droite (D_θ) se paramétrise par $D_\theta = \{M_\theta + t\overrightarrow{u}_\theta, t \in \mathbb{R}\}$. Soit un point P quelconque de D_θ, il existe donc un réel t tel que $P = M_\theta + t\overrightarrow{u}_\theta$ donc P a pour coordonnées $(\sqrt{2}\sin\theta + t\cos\theta, -\sqrt{2}\cos\theta + t\sin\theta, t)$
Vérifions que ces coordonnées satisfont l'équation de $\mathcal{E}$: $(\sqrt{2}\sin\theta + t\cos\theta)^2 + (-\sqrt{2}\cos\theta + t\sin\theta)^2 = 2 + t^2$ donc tout point P de D_θ appartient à $\mathcal{E}$ donc $D_\theta \subset \mathcal{E}$.

23. Soit $P(x,y,z) \in \mathcal{E}$. Alors $x^2+y^2 = z^2+2$ donc les nombres complexes $x+iy$ et $z - i\sqrt{2}$ ont même module. Donc il existe un réel θ tel que $x + iy = e^{i\theta}(z - i\sqrt{2}) = (\cos\theta + i\sin\theta)(z - i\sqrt{2})$ ce qui donne bien en identifiant les parties réelles et imaginaires $\begin{cases} x - z\cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta \\ y - z\sin\theta = -\sqrt{2}\cos\theta \end{cases}$

24. $\displaystyle\bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} D_\theta = \mathcal{E}$

Problème II : Analyse

A. Étude d'une fonction

1. sh est impaire donc f est paire.

2. **(a)** $\mathrm{sh}(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$ donc $\mathrm{sh}(1/x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1/x$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Par parité, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

(b) $\mathrm{sh}(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}e^t$ donc en posant $t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, il vient
$f(x) = \frac{1}{t}\mathrm{sh}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2t}e^t \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Par parité, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

3. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. sh est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc la composée $x \mapsto \mathrm{sh}(1/x)$ est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables.
Par ailleurs $x \mapsto x$ est dérivable. Donc le produit $x \mapsto x\mathrm{sh}(1/x)$ est dérivable.
$f'(x) = \mathrm{sh}(1/x) - \frac{1}{x}\mathrm{ch}(1/x) = [\mathrm{th}(1/x) - \frac{1}{x}]\mathrm{ch}(1/x)$

4. On pose $h(x) = \mathrm{th}(x) - x$, alors $h'(x) = -\mathrm{th}^2(x)$ d'où le tableau de variations

x	0	$+\infty$
h'	0	$-$
h	0	$\searrow$

5. On utilise le fait que $ch > 0$ et que f' est impaire.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	$\Vert$	$-$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1

6. DL_5 en 0 de $\mathrm{sh}(x)$: $\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$ donc en divisant par x il vient $\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$

7. On pose $X = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, alors $f(x) = \frac{\mathrm{sh}(X)}{X} = 1 + \frac{X^2}{6} + \frac{X^4}{120} + \underset{X\to 0}{o}(X^4) = 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^4}\right)$ ce qui fait $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = 0$ et $a_4 = \frac{1}{120}$. On a le même résultat en $-\infty$.

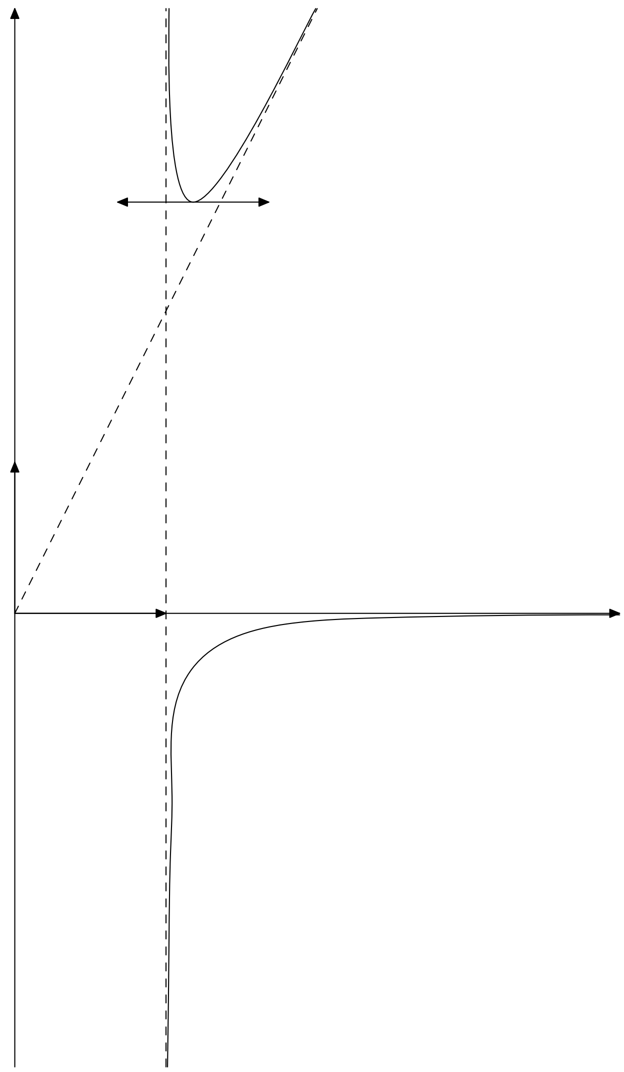
8. Soit $g(x) = f(1/x)$, avec le résultat précédent g possède un développement limité en 0 de la forme $g(x) = 1 + \underset{x\to 0}{o}(x)$, donc g se prolonge par continuité en 0 (ce prolongement s'appelle F et $F(0) = 1$), par ailleurs l'existence du développement limité à l'ordre 1 prouve que F est dérivable et $F'(0) = 0$.

B. Tracé d'une courbe paramétrée

9. La fonction x a été étudiée dans la partie précédente.
Passons à l'étude de y. $y'(t) = \frac{t-1}{t}e^{1/t}$.
La limite de y en 0^+ se calcule de manière similaire à la fonction f (*cf* question 2b). Les limites en 0^-, en $+\infty$ et en $-\infty$ ne sont pas des formes indéterminées. D'où le tableau de variations simultané de x et de y :

t	$-\infty$		0			1		$+\infty$
x'		$+$	$\|\|$			$-$		
x	1	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; +\infty$		$\searrow$			1
y	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$		e	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$		$-$	0	$+$	

10. Quand t tend vers $-\infty$ on a une asymptote verticale d'équation $x = 1$, la courbe est à sa droite.
Quand t tend vers $+\infty$ on a une asymptote verticale d'équation $x = 1$, la courbe est à sa gauche.
Quand t tend vers 0^- on a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$, la courbe est en dessous.
Étude de l'éventuelle asymptote oblique quand t tend vers 0^+ : posons $T = \frac{1}{t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} +\infty$.
Alors $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{2e^t}{e^T - e^{-T}} \underset{T\to+\infty}{\sim} \dfrac{2e^T}{e^T} \xrightarrow[T\to+\infty]{} 2$.
Maintenant $y(t) - 2x(t) = te^{-1/t} = \frac{1}{T}e^{-T} \xrightarrow[T\to+\infty]{} 0^-$ donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique et la courbe est au-dessus de son asymptote.



C. Une équation différentielle

12. Équation sans second membre : $xy' + y = 0$ ou encore $y' + \frac{1}{x}y = 0$ qui s'intègre en $y = Ke^{-\ln(x)} = \frac{K}{x}$
Pour le second membre on utilise la variation de la constante : $\frac{K'(x)}{x} = \frac{\mathrm{ch}(x)}{x}$ soit $K(x) = \mathrm{sh}(x) + Cste$.
(E) s'intègre en $x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)+C}{x}$

13. $x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)+C'}{x}$ (la constante C' n'étant pas forcément la même que la constante C).

14. En prenant $C = C' = 0$ la fonction F est solution de (E) sur $\mathbb{R}_*^+$ et sur $\mathbb{R}_*^-$. Maintenant $F(0) = 1$ et $F'(0) = 0$ donc en $x = 0$ on a encore $xF'(x) + F(x) = \mathrm{ch}(x)$.
Réciproquement soit y solution de (E) sur $\mathbb{R}$: il existe une constante C telle que si $x > 0, y(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)+C}{x} = \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} + \frac{C}{x}$. Si $C \neq 0$, puisque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x} = 1$, la fonction y diverge en 0^+ donc elle ne peut pas être continue en 0. Ainsi forcément $C = 0$. Au voisinage de 0^- on montre de manière similaire que $C' = 0$, ainsi forcément $y = F$.

D. Étude d'une suite

15. On remarque que $\frac{n+1}{n} \in]1, +\infty[$. Vue l'étude réalisée dans la partie A, la fonction f induit une bijection de $\mathbb{R}_*^+$ sur $]1, +\infty[$ donc l'équation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ possède une et une seule solution u_n sur $\mathbb{R}_*^+$.

16. Notons $\tilde{f} = f|_{\mathbb{R}_*^+}$. Nous avons vu à la partie A que $\tilde{f}$ est une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}_*^+$ sur $]1, +\infty[$. Donc sa bijection réciproque est strictement décroissante. Or $u_n = (\tilde{f})^{-1}(\frac{n+1}{n})$. Maintenant $n \mapsto \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ est strictement décroissante donc (u_n) est strictement croissante en tant que composée de deux fonctions strictement décroissantes.

17. $(\tilde{f})^{-1}$ est une bijection strictement décroissante de $]1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_*^+$, donc $\lim\limits_{x\to 1^+} (\tilde{f})^{-1} = +\infty$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1^+$ donc par composition des limites $u_n = (\tilde{f})^{-1}(\frac{n+1}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

18. $1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} = f(u_n) = 1 + \frac{1}{6u_n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{u_n^2}\right)$ or $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ donc en retranchant 1 il vient $\frac{1}{n} = \frac{1}{6u_n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{u_n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6u_n^2}$ d'où $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{6}$. Puisque $u_n > 0$ il vient $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n/6}$.

E. Une fonction définie par une intégrale

19. Autant partir du membre le plus compliqué pour aller vers le membre le plus simple : $2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) = 2\frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) = \mathrm{sh}(2x)$

20. Soit $P(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$. f est continue donc P est dérivable de dérivée f. De plus $J(x) = P(x) - P(x/2)$ donc J est dérivable et $J'(x) = f(x) - \frac{1}{2}f(x/2) = x\mathrm{sh}(1/x) - \frac{x}{4}\mathrm{sh}(2/x) = x\mathrm{sh}(1/x) - \frac{x}{2}\mathrm{sh}(1/x)\mathrm{ch}(1/x) = f(x)[1 - \frac{1}{2}\mathrm{ch}(1/x)]$

21. $J'(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{ch}(1/x) \leqslant 2 \iff e^{1/x} + e^{-1/x} \leqslant 4$. Posons $y = e^{1/x}$, on multiplie par y, ainsi $J'(x) \geqslant 0 \iff y^2 + 1 \leqslant 4y \iff y^2 - 4y + 1 \leqslant 0 \iff 2 - \sqrt{3} \leqslant y \leqslant 2 + \sqrt{3}$. Puisque $y = e^{1/x} > 1$, et que $2 - \sqrt{3} < 1$, il vient $J'(x) \geqslant 0 \iff \frac{1}{x} \leqslant \ln(2 + \sqrt{3}) \iff x \geqslant \frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}$

22.

x	0		$\frac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}$		$+\infty$
J'	$\Vert$	$-$	0	$+$	
J	$\Vert +\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

23.