Correction DS 11

Problème 1

1. $T: E \to \mathbb{R}$.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$ dans E

$\lambda.A + \mu.B = (\lambda.a_{i,j} + \mu.b_{i,j})_{i,j}$ donc

$$T(\lambda.A + \mu.B) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda.a_{i,i} + \mu.b_{i,i})$$

$$= \lambda\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu.\sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda.T(A) + \mu.T(B)$$

Donc $T \in E^*$.

Soit $U \in E$. $T_U: E \to \mathbb{R}$.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $A, B \in E$.

$$T_U(\lambda.A + \mu.B) = T((\lambda.A + \mu.B)U) = T(\lambda.AU + \mu.BU)$$

$$= \lambda T(AU) + \mu T(BU) = \lambda.T_U(A) + \mu.T_U(B)$$

Donc $T_U \in E^*$.

2.a $AB = (c_{i,j})$ avec $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$ donc $T(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}$.

On conclut en réindexant les sommes.

2.b ${}^tA = (a'_{j,i})$ avec $a'_{j,i} = a_{i,j}$.

$$T({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a'_{j,i}b_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

$$T(AB) = T({}^tAB) = T({}^t({}^tAB)) = T({}^tB{}^{tt}A) = T({}^tBA) = T(BA).$$

3.a $\ker T_U = E$.

3.b Si $U \neq 0$ elle possède au moins un coefficient non nul. Notons (i,j) son indice et λ sa valeur.

Pour $(i_0, j_0) = (j, i)$: $T_U(E_{i_0,j_0}) = T(UE_{i_0,j_0}) = \lambda \neq 0$.

$\operatorname{Im} T_U$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$ c'est donc $\mathbb{R}$.

Par le théorème du rang : $\dim H_U = \dim E - 1 = n^2 - 1$.

4.a $T_{i,j}(E_{k,l}) = T(E_{j,i}E_{k,l}) = T({}^tE_{i,j}E_{k,l})$ se voit égal au coefficient d'indice (i,j) de $E_{k,l}$ c'est à dire $\delta_{i,k}\delta_{j,l}$.

4.b Montrons que $\mathcal{B}$ est libre.

Si $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}T_{i,j} = 0$ alors

$\forall 1 \leq k, l \leq n$, on a $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}T_{i,j}(E_{k,l}) = 0$

d'où $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}\delta_{i,k}\delta_{j,l} = 0$ puis $\lambda_{k,l} = 0$.

$\mathcal{B}$ est une famille libre formée de $n^2 = \dim E$ éléments de E, c'est donc une base de E.

4.c $\varphi: E \to E^*$ est bien définie.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $U, V \in E$.

$$\forall M \in E, \varphi(\lambda.U + \mu.V)(M) = T((\lambda.U + \mu.V)M)$$
$$= \lambda.T(UM) + \mu T(VM) = \lambda\varphi(U)(M) + \mu\varphi(V)(M).$$

Donc $\varphi(\lambda.U + \mu.V) = \lambda.\varphi(U) + \mu.\varphi(V)$.

φ est une application linéaire.

De plus φ transforme la base $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de E en $(T_{j,i})_{1\leq i,j\leq n}$ qui est une base $(E,*)$, φ est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

5.a Comme $A \notin H$, la matrice A est non nulle et donc $\dim Vect(A) = 1$.
Soit $M \in H \cap Vect(A)$.
M s'écrit $\lambda.A$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si $\lambda \neq 0$ alors $A = \frac{1}{\lambda}.M \in H$ ce qui est exclu.
Nécessairement $\lambda = 0$ puis $A = 0$.
Ainsi $H \cap Vect(A) = \{0\}$, de plus $\dim H + \dim Vect(A) = n^2$, on peut conclure que H et $\mathrm{Vect}(A)$ sont supplémentaires dans E.

5.b $\forall M \in E, \exists!(X,\alpha) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $M = X + \alpha.A$.
Posons $\ell(M) = \alpha$, on définit ainsi une application $\ell : E \to \mathbb{R}$.
Montrons sa linéarité :
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $M, N \in E$.
$\exists!(X,\alpha) \in H \times \mathbb{R}$ et $\exists!(Y,\beta) \in H \times \mathbb{R}$ tels que :
$M = X + \alpha.A$ et $N = Y + \beta.A$.
On a $\ell(M) = \alpha$ et $\ell(N) = \beta$. Calculons $\ell(\lambda.M + \mu.N)$.
On a $\lambda.M + \mu.N = (\lambda.X + \mu.Y) + (\lambda\alpha + \mu\beta).A$ avec $\lambda.X + \mu.Y \in H$ ceci permet de reconnaître :
$\ell(\lambda.M + \mu.N) = \lambda\alpha + \mu\beta = \lambda\ell(M) + \mu\ell(N)$.
Ainsi ℓ est une forme linéaire sur E.
De plus $\ker \ell = H$ puisque les matrices M qui annulent ℓ sont celles qui s'écrivent : $M = X + 0.A$ avec $X \in H$.

5.c Pour $U = \varphi^{-1}(\ell) \neq 0$, on a $H_U = \ker T_U = \ker \varphi(U) = \ker \ell = H$.

6.a $rg(A) = n$ donc A est inversible.

6.b $T_{J_r}(A) = T(J_r A) = \sum_{i=1}^{r} T(E_{i,i}A) = 0$.

7. Soit H un hyperplan de E et $U \in E \setminus \{0\}$ telle que $H = H_U$.
Posons $r = rg(U)$, on sait qu'il existe des matrices inversibles P, Q telles que $PUQ = J_r$.
Pour tout $M \in E$, $T_U(M) = T(UM) = T(P^{-1}J_r Q^{-1}M) = T(J_r Q^{-1}MP^{-1})$.
Pour $M = QAP$, qui est une matrice inversible, on a $T_U(M) = T(J_r A) = 0$ et donc $M \in H_U$.
Ainsi $H = H_U$ possède au moins une matrice inversible, la matrice M.

Problème 2

Partie I

1. $\Delta_1 = a$, $\Delta_2 = a^2 - bc$, $\Delta_3 = a^3 + b^2c + bc^2 - 3abc$.

2.a Dans le cas $a = c$: $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ a & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & b \\ a & a & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & (a-b) & & a-b \end{vmatrix}$ via $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \dots, L_n \leftarrow L_n - L_1$.

donc en développant selon la première colonne $\Delta_n = a \begin{vmatrix} a-b & & (0) \\ & \ddots & \\ (a-b) & & a-b \end{vmatrix}_{[n-1]} = a(a-b)^{n-1}$.

En transposant, on obtient $\Delta_n = a(a-c)^{n-1}$ dans le cas $a = b$.

2.b $C_1 \leftarrow C_1 + \cdots + C_n$ donne $\Delta_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ a+(n-1)b & b & & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & b & & a \end{vmatrix}$.

$C_2 \leftarrow C_2 - C_1, \dots, C_n \leftarrow C_n - C_1$ donne

$$\Delta_n = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1} .$$

2.b $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ a & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & b \\ a & a & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & (a-b) & & a-b \end{vmatrix}$ via $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \dots, L_n \leftarrow L_n - L_1$.

3.a Via $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}$ et $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$ donne $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & & b & b & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ c & & a & b & 0 \\ c & \cdots & c & a & b-a \\ 0 & \cdots & 0 & c-a & 2a-b-c \end{vmatrix}$.

En développant selon la dernière colonne :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & & b & b & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ c & & a & b & 0 \\ c & \cdots & c & a & b-a \\ 0 & \cdots & 0 & c-a & 2a-b-c \end{vmatrix} = -(b-a) \begin{vmatrix} a & & b & b \\ & \ddots & & \vdots \\ c & & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c-a \end{vmatrix} + (2a-b-c) \begin{vmatrix} a & & b & b \\ & \ddots & & \vdots \\ c & & a & b \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$$

puis $\Delta_n = -(b-a)(c-a)\Delta_{n-2} + (2a-b-c)\Delta_{n-1}$ et la relation demandée.

3.b La suite $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - (2a-b-c)r + (a-b)(a-c) = 0$. En reconnaissant somme et produit des racines, les solutions de cette équation caractéristique sont $a-b$ et $a-c$, elles sont distinctes car $b \neq c$ et donc le terme général de (Δ_n) est de la forme $\Delta_n = \lambda(a-b)^n + \mu(a-c)^n$.

Pour $n=1$, on obtient $\lambda(a-b)+\mu(a-c)=a$ (1)

Pour $n=2$, on obtient $\lambda(a-b)^2+\mu(a-c)^2=a^2-bc$ (2)

$(a-c)\times(1)-(2)$ donne $\lambda(a-b)(b-c)=c(b-a)$ donc $\lambda=\dfrac{c}{c-b}$ et de même $\mu=\dfrac{b}{b-c}$ d'où

$\Delta_n=\dfrac{c(a-b)^n-b(a-c)^n}{c-b}$.

Partie II

1.a En retranchant la première colonne à toutes les autres colonnes, on fait disparaître les x des colonnes $C_2,\dots,C_n$. En développant alors le déterminant selon sa première colonne on obtient une somme de coefficients qui sont des fonctions affines de x multipliés par des cofacteurs qui eux ne dépendent par de x. Ainsi $D_n(x)$ apparaît comme une fonction affine de x.

1.b Pour $x=-b$, $D_n(-b)=\prod_{i=1}^n(a_i-b)=\beta-\alpha b$.

Pour $x=-c$, $D_n(-c)=\prod_{i=1}^n(a_i-c)=\beta-\alpha c$.

On en déduit $\alpha=\dfrac{D_n(-b)-D_n(-c)}{c-b}=\dfrac{\prod_{i=1}^n(a_i-b)-\prod_{i=1}^n(a_i-c)}{c-b}$ et

$\beta=D_n(-b)+\alpha b=\dfrac{c\prod_{i=1}^n(a_i-b)-b\prod_{i=1}^n(a_i-c)}{c-b}$.

1.c $D_n=D_n(0)=\beta=\dfrac{c\prod_{i=1}^n(a_i-b)-b\prod_{i=1}^n(a_i-c)}{c-b}$.

2.a Notons $m_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de la matrice définissant D_n. En fixant c et en faisant b, on peut percevoir $m_{i,j}$ comme une fonction de b : $b\mapsto m_{i,j}(b)$. Cette fonction est continue car soit $m_{i,j}(b)=b$, soit $m_{i,j}(b)$ ne dépend pas de b. Puisque $D_n(b)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n m_{\sigma(i),i}(b)$, $b\mapsto D_n(b)$ est continue par opération sur les fonctions continue.

2.b Par continuité : $D_n(c)=\lim_{b\to c}D_n(b)$.

Or pour $b\neq c$: $D_n(b)=\dfrac{c\prod_{i=1}^n(a_i-b)-b\prod_{i=1}^n(a_i-c)}{c-b}$ donc $D_n(c)=\lim_{b\to c}\dfrac{c\prod_{i=1}^n(a_i-b)-b\prod_{i=1}^n(a_i-c)}{c-b}$.

$$\frac{c\prod_{i=1}^n(a_i-b)-b\prod_{i=1}^n(a_i-c)}{c-b}=\frac{(c-b+b)\prod_{i=1}^n(a_i-b)-b\prod_{i=1}^n(a_i-c)}{c-b}=\prod_{i=1}^n(a_i-b)-b\frac{\prod_{i=1}^n(a_i-b)-\prod_{i=1}^n(a_i-c)}{b-c}$$

Mais $\lim_{c\to b}\prod_{i=1}^n(a_i-b)=\prod_{i=1}^n(a_i-c)$ et

$$\lim_{b\to c}\frac{\prod_{i=1}^n(a_i-b)-\prod_{i=1}^n(a_i-c)}{b-c}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(\prod_{i=1}^n(a_j-b)\right)_{b=c}=-\sum_{i=1}^n\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n(a_i-c).$$

Finalement, quand $b=c$: $D_n=\prod_{i=1}^n(a_i-c)+c\sum_{i=1}^n\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n(a_j-c)$.

Fin de la correction