Calculatrices interdites *Durée 4 heures*

On rappelle qu'il est tenu compte de la présentation et de la rédaction des copies.
En particulier, les résultats obtenus doivent être encadrés pour être pris en compte.

Enoncé :

Problème 1

Soit n un entier, $n \geq 2$; on note $E = M_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des formes linéaires sur E.

Les éléments de E sont notés $M = (m_{i,j})$, la matrice élémentaire $E_{i,j}$ est la matrice de E dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve sur la i ème ligne et sur la j ème colonne, qui vaut 1.

Lorsque A et B sont des éléments de E, on note $A.B$ leur produit.

Si $M \in E$, on note $\mathrm{Vect}(M)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par M.

L'objectif du problème est de montrer que chaque hyperplan vectoriel de E possède au moins une matrice inversible.

Si $M = (m_{i,j}) \in E$, on note $T(M)$ le réel $\sum_{k=1}^{n} m_{k,k}$.

On définit ainsi une application T de E vers $\mathbb{R}$: $M \mapsto T(M)$.

A chaque matrice U de E, on associe l'application T_U de E vers $\mathbb{R}$:

$M \mapsto T_U(M) = T(U.M)$.

1. Montrer que T est une forme linaire sur E puis qu'il en est de même de T_U pour tout U de E.
   On note H_U le noyau de T_U.

2. Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ des éléments de E.

2.a Montrer que $T(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} b_{i,j}$.

2.b En déduire les identités :
$T({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j}$ et $T(BA) = T(AB)$.

3. Soit U dans E.

3.a Si U est la matrice nulle, déterminer $\ker T_U$.

3.b Si U n'est pas la matrice nulle, montrer que l'on peut trouver un couple d'entiers (i_0, j_0) tel que $T_U(E_{i_0,j_0}) \neq 0$. Décrire alors $\mathrm{Im}\, T_U$ puis déterminer la dimension de H_U.

4. Pour $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$, on note $T_{i,j} = T_{E_{j,i}}$.

4.a Les indices k et ℓ étant fixés, calculer $T_{i,j}(E_{k,\ell})$ en utilisant la première relation du 2.b.

4.b En déduire que les n^2 éléments $T_{i,j}$ de E^* permettent de définir une base de E^*.

4.c Montrer que l'application φ de E vers E^* : $U \mapsto \varphi(U) = T_U$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

5. On considère un hyperplan vectoriel H de E.

5.a Soit A une matrice de E qui n'appartient pas à H, montrer que les sous-espaces vectoriels H et $\mathrm{Vect}(A)$ sont supplémentaires dans E.

5.b Construire alors un élément ℓ de E tel que $H = \ker \ell$.

5.c Prouver l'existence d'un élément U de E, non nul, tel que $H = H_U$.

6. Pour $1 \leq r \leq n$, on note $J_r = \sum_{i=1}^{r} E_{i,i}$ et A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.a Prouver que A est inversible.

6.b Prouver que A appartient à l'hyperplan H_{J_r}.

7. Conclure que chaque hyperplan vectoriel H de E possède au moins une matrice inversible.
Indication : lorsque $H = H_U$, avec U de rang r, on rappelle l'existence de matrices P,Q inversibles telles que $PUQ = J_r$.

Problème 2
Dans tout le problème a,b,c désignent des réels et n un entier supérieur à 1.

Partie I

Soit Δ_n le déterminant de la matrice carrée d'ordre n formée de la manière suivante :
les éléments de la diagonale principale sont égaux à a, ceux au dessus de la cette diagonale valent b et enfin ceux en dessous de la diagonale valent c.

Ainsi : $\Delta_1 = |a|$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix}$ et $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & a & b \\ c & c & a \end{vmatrix}$.

1. Calculer Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

2.a Calculer Δ_n dans les cas $a = c$ et $a = b$.

2.b Calculer Δ_n dans le cas où $b = c$.

3. On suppose $b \neq c$ et $n \geq 3$.

3.a Etablir que $\Delta_n - (2a-b-c)\Delta_{n-1} + (a-b)(a-c)\Delta_{n-2} = 0$.
On pourra par exemple opérer avec les deux dernières colonnes puis faire la même manipulation sur les lignes.

3.b Donner l'expression du terme général de la suite $(\Delta_n)_{n\geq 1}$.

Partie II

Dans cette partie $a_1,\dots,a_n$ désignent n réels. On désire calculer le déterminant D_n de la matrice carrée d'ordre n formée de la manière suivante :

Les coefficients diagonaux sont les $a_1,\dots,a_n$, les coefficients au dessus de la diagonale sont égaux à b tandis que ceux en dessous de la diagonale valent c.

Ainsi $D_1 = |a_1|$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c & a_2 \end{vmatrix}$ et $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b & b \\ c & a_2 & b \\ c & c & a_3 \end{vmatrix}$.

1. Dans un premier temps, nous supposons $b \neq c$.
On pose $D_n(x)$, le déterminant de la matrice obtenue en ajoutant x à tous les coefficients de la matrice définissant D_n.

Ainsi $D_n(x) = \begin{vmatrix} a_1+x & b+x & \cdots & b+x \\ c+x & a_2+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ c+x & \cdots & c+x & a_n+x \end{vmatrix}$.

1.a Montrer que $x \mapsto D_n(x)$ est une fonction affine, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D_n(x) = \alpha x + \beta$.

1.b Calculer α et β en évaluant $D_n(x)$ pour des valeurs judicieuses de x.

1.c En déduire l'expression de D_n.

2. On désire calculer D_n dans le cas où $b = c$.

2.a On fixe le paramètre c et on fait varier le paramètre b dans $\mathbb{R}$. Etablir que D_n apparaît alors comme une fonction continue de la variable b variant dans $\mathbb{R}$.

2.b En déduire la valeur de D_n dans le cas où $b = c$.

Fin de l'énoncé