Exo7

Année 2014

Exercices de mathématiques

Exercice 1. Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements :

   A : «Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent».

   B : «Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent».
2. Soit X la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres» : Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

Correction 1.
1. On utilise une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 4 lettres» $n = 5$, $p = \frac{3}{5}$. On obtient $P(A) = 1 - (\frac{2}{5})^4 = 0.9744$, $P(B) = \binom{4}{2}(\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^2 = 0.3456$.
2. La loi de probabilité de X est une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres». $n = 10$, $p = \frac{3}{5}$, son espérance est $np = 6$, sa variance est $np(1-p) = \frac{12}{5}$.

Exercice 2. On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité des événements :
A : au moins une ampoule est défectueuse ;
B : les 3 ampoules sont défectueuses ;
C : exactement une ampoule est défectueuse.

Correction 2. On utilise une loi hypergéométrique

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = 0.736\,26$$

$$P(B) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} = 2.197\,8 \times 10^{-2}$$

$$P(C) = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = 0.494\,51$$

Exercice 3. Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : «nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20». Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) quelle est son espérance, son écart-type ? Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

Correction 3. Soit X la variable aléatoire nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20. La loi de X est une loi binomiale de paramètres $n = 20$, $p = 0.75$. Son espérance est $np = 15$, son écart-type est $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{15 \cdot 0.25}$. La probabilité pour que X soit égal à 15 est $\binom{20}{15} 0.75^{15} 0.25^5 = 0.202\,33$.

Exercice 4. L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

1. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
   (a) les trois sujets tirés ;
   (b) exactement deux sujets sur les trois sujets ;
   (c) aucun des trois sujets.
2. Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Correction 4. La variable aléatoire associée à ce problème est X «nombre de sujets révisés parmi les 3» ; son support est l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. La loi de X est une loi hypergéométrique puisque l'événement $[X = k]$, pour k compris entre 0 et 3, se produit si le candidat tire k sujet(s) parmi les 60 révisés, et $3 - k$ sujets parmi les 40 non révisés.
Alors :

1. Les trois sujets tirés ont été révisés : $P[X = 3] = \frac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}}$.
2. Deux des trois sujets tirés ont été révisés : $P[X = 2] = \frac{\binom{60}{2} \cdot \binom{40}{1}}{\binom{100}{3}}$.
3. Aucun des trois sujets : $P[X = 0] = \frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}}$.

La loi de probabilité de X est donnée sur le support $\{0, 1, 2, 3\}$ par :

$$P[X = k] = \frac{\binom{60}{k} \cdot \binom{40}{3-k}}{\binom{100}{3}}$$

Résultats numériques :
$k = 0 : P[X = 0] \simeq 6.110 \times 10^{-2}$
$k = 1 : P[X = 1] \simeq 0.289$
$k = 2 : P[X = 2] \simeq 0.438$
$k = 3 : P[X = 3] \simeq 0.212$
L'espérance est $E(X) = 1.8$ (selon la formule $E(X) = np$).

Exercice 5. Un candidat se présente à un concours où, cette fois, les 20 questions sont données sous forme de QCM. A chaque question, sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. L'examinateur fait le compte des réponses exactes données par les candidats. Certains candidats répondent au hasard à chaque question ; pour ceux-la, définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Correction 5. Puisque les réponses sont données au hasard, chaque grille-réponses est en fait la répétition indépendante de 20 épreuves aléatoires (il y a 4^{20} grilles-réponses). Pour chaque question la probabilité de succès est de $\frac{1}{4}$ et l'examinateur fait le compte des succès : la variable aléatoire X, nombre de bonnes réponses, obéit à une loi binomiale donc on a directement les résultats. Pour toute valeur de k comprise entre 0 et 20 : $P[X=k] = C_{20}^{k}(\frac{1}{4})^{k}(1-\frac{1}{4})^{20-k}$, ce qui donne la loi de cette variable aléatoire.
Quelle est l'espérance d'un candidat fumiste ? C'est $E(X) = np = 5$

Exercice 6. Dans une poste d'un petit village, on remarque qu'entre 10 heures et 11 heures, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute est considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité pour qu'une personne se présente entre la minute n et la minute $n+1$ est : $p = 0.1$. On veut calculer la probabilité pour que : 3,4,5,6,7,8... personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h.

1. Définir une variable aléatoire adaptée, puis répondre au problème considéré.
2. Quelle est la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h ?

Correction 6. Une variable aléatoire adaptée à ce problème est le nombre X de personnes se présentant au guichet entre 10h et 11h. Compte tenu des hypothèses, on partage l'heure en 60 minutes. Alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0.1$. On est dans le cas de processus poissonnien : on peut approcher la loi de X par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 60 \times 0.1 = 6$. L'espérance de X est donc $E(X) = 6$;
On peut alors calculer les probabilités demandées : $P[X=k] = \frac{6^k e^{-6}}{k!}$.
Valeurs lues dans une table ou calculées : $P[X=3] \simeq 0.9\%$; $P[X=4] \simeq 13.4\%$; $P[X=5] = P[X=6] \simeq 16.1\%$; $P[X=7] \simeq 13.8\%; P[X=8] \simeq 10.3\,\%$.
Remarque : de façon générale si le paramètre λ d'une loi de Poisson est un entier K, on a : $P[X=K-1] = \frac{K^{K-1}e^{-K}}{(K-1)!} = \frac{K^K e^{-K}}{K!} = P[X=K]$.
Calculons maintenant la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h : C'est $P[X \geqslant 10] = 1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{6^k e^{-6}}{k!} \simeq 8.392 \times 10^{-2}$.

Exercice 7. Si dans une population une personne sur cent est un centenaire, quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 100 personnes choisies au hasard ? Et parmi 200 personnes ?

Correction 7. La probabilité $p = \frac{1}{100}$ étant faible, on peut appliquer la loi de Poisson d'espérance $100p = 1$ au nombre X de centenaires pris parmi cent personnes. On cherche donc : $P[X \geqslant 1] = 1 - P[X=0] = 1 - e^{-1} \simeq 63\%$.

Sur un groupe de 200 personnes : l'espérance est 2 donc : $P[X' \geqslant 1] = 1 - e^{-2} \simeq 86\%$. La probabilité des événements : $[X' = 1]$ et $[X' = 2]$ sont les mêmes et valent : 0.14. Ainsi, sur 200 personnes, la probabilité de trouver exactement un centenaire vaut 0.14, égale à la probabilité de trouver exactement deux centenaires. Cette valeur correspond au maximum de probabilité pour une loi de Poisson d'espérance 2 et se généralise. Si X obeit à une loi de Poisson d'espérance K, alors le maximum de probabilité est obtenu pour les événements $[X = K - 1]$ et $[X = K]$.

Exercice 8. Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et en remplacer certaines le cas échéant. D'après des statistiques précédentes, il évalue à 30% la probabilité pour une machine de tomber en panne en 5 ans ; parmi ces dernières, la probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne plus grave est évaluée à 75% ; cette probabilité est de 40% pour une machine n'ayant jamais eu de panne.

1. Quelle est la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans d'être hors d'usage ?
2. Quelle est la probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant ?
3. Soit X la variable aléatoire «nombre de machines qui tombent en panne au bout de 5 ans, parmi 10 machines choisies au hasard». Quelle est la loi de probabilité de X, (on donnera le type de loi et les formules de calcul), son espérance, sa variance et son écart-type ?
4. Calculer $P[X = 5]$.

Correction 8.
1. 30% est la probabilité de l'événement Panne, noté Pa ; la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans, d'être hors d'usage est $P(HU) = P(HU/Pa)P(Pa) + P(HU/nonPa)P(nonPa) = 0.3 \cdot 0.75 + 0.4 \cdot 0.7 = 0.505$.
2. La probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant est $P(\text{non}\, Pa/HU) = P(HU/\text{non}\, Pa)P(\text{non}\, Pa)/P(HU) = 0.4 \cdot 0.7/0.505 = 0.554\,46$.
3. La loi de probabilité de X est une loi binomiale, $n = 10$, $p = 0.4$, espérance 4.
4. $P[X = 5] = \binom{10}{5}(0.3)^5(0.7)^5 = 0.102\,92$

Exercice 9. Une population comporte en moyenne une personne mesurant plus de 1m90 sur 80 personnes. Sur 100 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m (utiliser une loi de Poisson). Sur 300 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m.

Correction 9. Le nombre X de personnes mesurant plus de 1.90m parmi 100 obéit à une loi de Poisson de paramètre $\frac{100}{80}$.

La probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m est donc $1 - P[X = 0] = 1 - e^{-\frac{100}{80}} = 1 - e^{-\frac{5}{4}} = 0.713\,50$.
Sur 300 personnes : la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m est donc $1 - P[Y = 0] = 1 - e^{-\frac{300}{80}} = 0.976\,48$.

Exercice 10. Soit n un entier strictement positif. Quelle est la loi du nombre de garçons dans une famille de n enfants ? (Préciser les hypothèses que vous faites)

Exercice 11. Une usine fabrique des transistors. Chaque transistor a une probabilité de 3% d'être défectueux. Quelle est la loi du nombre de transistors défectueux dans un lot de 100 transistors ? Que vaut son espérance et que représente-t-elle ?

Exercice 12. L'entreprise Luminex fabrique des lampes, dont 80% durent plus de 3000 heures. Des tests sont effectués sur des échantillons de taille $n = 15$.

1. Quelle est le nombre moyen de lampes qui ont une durée de vie inférieure à 3000 heures dans un échantillon de taille 15 ?
2. Quelle est la probabilité que toutes les lampes de l'échantillon durent plus de 3000 heures ?
3. Quelle est la probabilité que 13 lampes ou plus, dans un échantillon de taille 15, durent plus de 3000 heures ?

Correction 12.

1. Une lampe tirée au hasard a une probabilité de $0,2$ d'avoir une durée de vie inférieure à 3000 heures. Le nombre X de lampes qui ont une durée de vie inférieure à 3000 heures dans un échantillon de taille 15 tiré au hasard est la somme de 15 variables de Bernoulli de paramètre $p = 0,2$. Par conséquent, il suit une loi binomiale $B(15; 0,2)$. Son espérance vaut $E(X) = 15 \times 0,2 = 3$.
2. C'est $p(X = 0) = \binom{15}{0}(0,2)^0(0,8)^{15} \sim 0,0352$.
3. C'est $p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)$

$$\begin{aligned} &= \binom{15}{0}(0,2)^0(0,8)^{15} + \binom{15}{1}(0,2)^1(0,8)^{14} + \binom{15}{2}(0,2)^2(0,8)^{13} \\ &= 0,0352 + 0,1319 + 0,2309 \simeq 0,398. \end{aligned}$$

Exercice 13. Un transporteur aérien a observé que 25% en moyenne des personnes ayant réservé un siège pour un vol ne se présentent pas au départ. Il décide d'accepter jusqu'à 23 réservations alors qu'il ne dispose que de 20 sièges pour ce vol.

1. Soit X la variable aléatoire "nombre de clients qui viennent après réservation quand 23 places ont été réservées". Quelle est la loi de X (précisez les hypothèses que vous faites pour modéliser la situation) ? Quelle est son espérance ?

2. Si 23 personnes ont réservé, quelle est la probabilité que toutes les personnes qui se présentent au départ aient un siège ?

Correction 13. 1. La loi de X est une loi binomiale de paramètres $n = 23, p = 0,75$: $P(X = k) = \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k}$ si $0 \leqslant k \leqslant n$. Son espérance est $np = 17,25$.

2. $P(X \leqslant 20) = 1 - P(X \in \{21, 22, 23\}) \simeq 0,951$.

Exercice 14. On lance 10 fois une pièce supposée bien équilibrée. On désigne par X la fréquence du nombre de fois où pile a été obtenu (c'est-à-dire le nombre de pile divisé par 10).

1. Quelle est la loi de X ?
2. Avec quelle probabilité X est-elle strictement au dessus de 0,5 ?
3. Avec quelle probabilité X est-elle comprise entre 0,4 et 0,6 (bornes incluses) ?
4. Déterminer le plus petit entier $a > 0$ telle que la probabilité que X soit dans l'intervalle $[0,5 - \frac{a}{10}, 0,5 + \frac{a}{10}]$ soit supérieure à 95%.
5. On lance la pièce 10 fois. Elle tombe 3 fois sur pile et 7 fois sur face. D'après vous la pièce est-elle bien équilibrée (on justifiera sa réponse en utilisant la question 3 ? Même question si on obtient 1 fois pile et 9 fois face.

Correction 14. 1. $Y \sim B(10, 1/2)$, $X = Y/10$.

2. $P(X > 0,5) = P(Y > 5) = P(Y = 6, 7, 8, 9, 10) \simeq 0,377$.
3. $P(0,4 \leqslant X \leqslant 0,6) = P(4 \leqslant Y \leqslant 6) = P(Y = 4, 5, 6) \simeq 0,656$
4. $P(3 \leqslant Y \leqslant 7) \simeq 0,891$. $P(2 \leqslant Y \leqslant 8) \simeq 0,978$. Donc $a = 3$.
5. Oui. Non.

Exercice 15. Un standard téléphonique reçoit en moyenne 2 appels par minute. Les appels sont répartis au hasard dans le temps.

1. Quelle est la loi de probabilité régissant le nombre d'appels reçus en 3 minutes ? Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun appel en 3 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que le nombre d'appels en 2 minutes soit supérieur ou égal à 5 ?

Correction 15. 1. C'est une loi de Poisson de paramètre 6 : $P(X = n) = e^{-6}\frac{6^n}{n!}$. La probabilité qu'il n'y ait aucun appel est $p(X = 0) = e^{-6} \simeq 0,002$.

2. Soit Y la variable aléatoire "Nombre d'appels reçus en 2 minutes". Alors Y suit une loi de Poisson de paramètre 4. La probabilité qu'il y ait entre 0 et 4 appels est $P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) \simeq 0,629$. Donc $P(Y \geqslant 5) = 1 - P(Y \leqslant 4) \simeq 0,371$.

Exercice 16. Dans une dictature militaire, le dictateur veut augmenter le nombre de naissances de garçons. Il impose la règle suivante : si une femme donne naissance à une fille, elle doit continuer à faire des enfants ; si elle donne naissance à un garçon, elle doit arrêter d'avoir des enfants. On suppose que chaque femme a au moins un enfant et pas plus de 5 enfants.

1. Soit X le nombre de filles par femme. Quelle est la loi de X ?
2. Quel est le nombre moyen de filles d'une femme ? Le nombre moyen de garçons ? Cette règle est-elle efficace pour augmenter le nombre de garçons ?

Correction 16.
1. $P(X = k) = 0,5^k 0,5 = 0,5^{k+1}$ si $0 \leqslant k \leqslant 4$, $P(X = 5) = 0,5^5$.
2. $E(X) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant 5} kP(X = k) = \frac{1}{4} + 2\frac{1}{8} + 3\frac{1}{16} + 4\frac{1}{32} + 5\frac{1}{32} = 0,96875$. Y = nombre de garçons. Il y a exactement 1 garçon sauf s'il y a 5 filles. $P(Y = 0) = 0,5^5 = 1/32$. $E(Y) = P(Y = 1) \times 1 = 0,96875$. $E(X) = E(Y)$, donc pas efficace.

Exercice 17 (Loi multinomiale)**.** On lance quatre dés. Quelle est la probabilité d'obtenir deux 6 et deux 3 ?

Exercice 18. On lance deux dés à 6 faces. Déterminer la loi de la variable aléatoire donnant le maximum des deux chiffres obtenus.

Exercice 19. On considère $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Parmi les choix suivants, quels sont ceux qui donnent une probabilité P sur Ω ?

a) $P(1) = 1/4, \quad P(2) = 3/8, \quad P(3) = 1/16, \quad P(4) = 3/16.$
b) $P(1) = 0, \quad P(2) = 1/3, \quad P(3) = 1/6, \quad P(4) = 1/2.$
c) $P(1) = 1/5, \quad P(2) = 1/4, \quad P(3) = 1/3, \quad P(4) = 1/2.$
d) $P(1) = 1/4, \quad P(2) = 1/2, \quad P(3) = -1/4, \quad P(4) = 1/2.$

Exercice 20. Le tableau ci-dessous donne la loi d'un couple de variables aléatoires $Z = (X, Y)$, avec X prenant ses valeurs dans $\{-1, 1\}$ et Y prenant ses valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$.

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	$1/12$	$1/3$	$1/12$
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$

1. Déterminer la probabilité que X et Y soient égales.
2. Déterminer les lois de X et de Y.
3. Déterminer les lois de $X + Y$ et de XY.

Exercice 21. Le tableau ci-dessous donne la loi d'un couple de variables aléatoires (X, Y), avec X et Y prenant chacune leurs valeurs dans $\{1, 2, 3\}$.

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0	1/9	2/9
2	2/9	0	1/9
3	1/9	2/9	0

1. Calculer la probabilité que X et Y soit égales.
2. Déterminer les lois de X et de Y.

Exercice 22. Charles ne supporte pas les chats et Sophie déteste les chiens. Charles n'élève pas plus d'un chien et Sophie pas plus d'un chat. La probabilité pour que Charles ait un chien est de $0,2$. Si Charles n'a pas de chien, la probabilité pour que Sophie ait un chat est de $0,1$. On note X le nombre de chiens de Charles, Y le nombre de chats de Sophie et Z le nombre d'animaux du couple.

1. Calculer la probabilité pour qu'ils n'aient pas d'animaux.
2. On suppose de plus que la probabilité que Z soit égal à 1 est de $0,1$.
   (a) Calculer la probabilité pour que Z soit égal à 2.
   (b) Déterminer l'espérance et l'écart-type de Z.
   (c) Établir la loi de probabilité du couple (X, Y). Quelle est la loi de probabilité de Y ?
   (d) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction 22. 1. Soit A l'événement "Charles n'a pas de chien" et B l'événement "Sophie n'a pas de chat". L'énoncé donne $P(B|A) = 0,9$. Par conséquent, la probabilité pour que le ménage n'ait aucun animal est $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0,9 \times 0,8 = 0,72$.

2. (a) Z ne peut prendre que les valeurs 0, 1 et 2. L'événement $\{Z = 0\}$ coïncide avec $A \cap B$, donc $P(Z = 0) = 0,72$. Il vient $P(Z = 2) = 1 - P(Z = 0) - P(Z = 1) = 1 - 0,72 - 0,1 = 0,18$.
   (b) $E(Z) = 0 \cdot P(Z = 0) + 1 \cdot P(Z = 1) + 2 \cdot P(Z = 2) = 0,1 + 0,36 = 0,46$. $E(Z^2) = 0^2 P(Z = 0) + 1^2 P(Z = 1) + 2^2 P(Z = 2) = 0,1 + 0,72 = 0,82$, d'où $\mathrm{Var}(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 0,6084$, $\sigma(Z) = \sqrt{\mathrm{Var}(Z)} = 0,78$.
   (c) On calcule $P(X = 0 \text{ et } Y = 0) = P(Z = 0) = 0,72$, $P(X = 1 \text{ et } Y = 1) = P(Z = 2) = 0,18$, $P(X = 0 \text{ et } Y = 1) = P(A \cap B^c) = P(B^c|A)P(A) = (1 - P(B|A))P(A) = 0,1 \times 0,8 = 0,08$. On complète le tableau en utilisant le fait que le somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.

	$Y=0$	$Y=1$	Total
$X=0$	0,72	0,08	0,8
$X=1$	0,02	0,18	0,2
Total	0,74	0,26	1

La dernière ligne du tableau donne la loi de Y, $P(Y=0)=0,74$ et $P(Y=1)=0,26$.

(d) On constate que $P(X=1 \text{ et } Y=1)=0,18$ n'est pas égal à $P(X=1)P(Y=1)=0,2\times 0,26$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 23. Dans une pile de n ($n \geqslant 2$) feuilles dactylographiées, se trouvent les deux lettres que l'on doit envoyer. On enlève une par une les feuilles du paquet jusqu'à ce que l'une des lettres à envoyer se trouve sur le dessus du paquet. On note X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de feuilles enlevées. On recommence l'opération jusqu'à trouver la deuxième lettre et on note X_2 la variable aléatoire donnant le nombre de feuilles qu'il a fallu retirer du paquet après avoir trouvé la première lettre et avant que la deuxième lettre soit sur le dessus du paquet. Sans information supplémentaire, on peut supposer que toutes les positions possibles pour les deux lettres sont équiprobables.

1. Décrire l'ensemble Ω des résultats possibles pour cette expérience aléatoire et la probabilité P mise sur Ω.
2. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) puis la loi de X_1 et de X_2.
3. Calculer la probabilité de l'événement “$X_1 = X_2$”.
4. On note $Z = X_1 + X_2 + 2$. Que représente la variable aléatoire Z ? Déterminer sa loi.