Dans ce problème E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension trois muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. La norme de E est note $||\,.\,||$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E, Id_E l'application identité de E et 0 le vecteur nul de E.

1) Soit $\psi \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme de matrice $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

1.1 Montrer que $\dfrac{4}{3}\psi$ est un demi tour (ou retournement) dont on précisera l'axe D.

1.2 En déduire que ψ est la compose de deux endomorphismes simples de E que l'on prcisera.

2) On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des endomorphismes ϕ de E tels que :

$$\exists k \in [0, 1[, \ \forall x \in E, \ ||\phi(x)|| \leq k||x||.$$

2.1 Monter que $\psi \in \mathcal{S} \cap GL(E)$.

2.2 Id_E appartient il à $\mathcal{S}$?

2.3 Montrer que $\mathcal{S}$ est stable pour $\circ$. $\mathcal{S} \cap GL(E)$ est il un sous groupe de $(GL(E), \circ)$?

2.4 Soit $\phi \in \mathcal{S}$. Montrer que $\ker(\phi - Id_E) = \{0\}$. En déduire que $(\phi - Id_E) \in GL(E)$.

2.5 Montrer que $\phi \in \mathcal{S}$ si et seulement si : $\exists k \in [0, 1[, \ \forall x \in E, \ (||x|| = 1 \Rightarrow ||\phi(x)|| \leq k)$.

2.6 Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de ϕ est diagonale, à éléments diagonaux strictement inférieurs 1 en valeurs absolue. Montrer que $\phi \in \mathcal{S}$.

3) Soit $\mu \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $M = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

3.1 On définit $e'_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_3)$, $e'_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ et $e'_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - e_2 + 2e_3)$. Vérifier que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base orthonormée de E.

3.2 Déterminer la matrice de μ dans la base $\mathcal{B}'$. En déduire que $\mu \in \mathcal{S}$.

4) Soit $\phi_\alpha \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M_\alpha = \alpha\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On se propose de montrer que $\phi_\alpha \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow |\alpha| < \dfrac{1}{2}$.
Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ un vecteur de E de norme 1.

4.1 Montrer que : $||\phi_\alpha(x)||^2 = \alpha^2\,(1 + (x_1 - x_2 - x_3)^2)$.

4.2 Le vecteur x s'écrit dans la base $\mathcal{B}'$, $x = x'_1e'_1 + x'_2e'_2 + x'_3e'_3$.

Montrer que $||\phi_\alpha(x)||^2 = \alpha^2\,(1 + 3x'^2_1)$. En déduire que $||\phi_\alpha(x)|| \leq 2\alpha$.

Déterminer l'ensemble des vecteurs x de E de norme 1 pour lesquels cette ingalité est une égalité.

4.3 Montrer que $\phi_\alpha \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow |\alpha| < \dfrac{1}{2}$.