Année 2014

Exercices de mathématiques

Exercice 1. Montrer que si $|z| \leqslant k < 1$ alors $1 - k \leqslant |1+z| \leqslant 1+k$. Faire un dessin et montrer qu'il peut y avoir égalité.

Exercice 2. Montrer algébriquement et géométriquement que si $|z| = 1$ alors $|1+z| \geqslant 1$ ou $\left|1+z^2\right| \geqslant 1$.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$,
2. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Indications 3. Le premier ensemble est une droite le second est un cercle.

Correction 3. Nous identifions $\mathbb{C}$ au plan affine et $z = x+iy$ à $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Remarquons que pour les deux ensembles $z = 5$ n'est pas solution, donc

$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-3| = |z-5|.$$

Ce qui signifie précisément que les points d'affixe z sont situés à égale distance des points A, B d'affixes respectives $3 = (3,0)$ et $5 = (5,0)$. L'ensemble solution est la médiatrice du segment $[A,B]$.

Ensuite pour

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow |z-3|^2 = \frac{1}{2}|z-5|^2 \\
&\Leftrightarrow (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)} \\
&\Leftrightarrow z\overline{z} - (z+\overline{z}) = 7 \\
&\Leftrightarrow |z-1|^2 = 8 \\
&\Leftrightarrow |z-1| = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc le cercle de centre le point d'affixe $1 = (1,0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Exercice 4.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (1) $(z-2)/(z-1) = i$. On donnera la solution sous forme algébrique.

2. Soit M, A, et B les points d'affixes respectives $z, 1, 2$. On suppose que $M \neq A$ et que $M \neq B$. Interpréter géométriquement le module et un argument de $(z-2)/(z-1)$ et retrouver la solution de l'équation (1).

Exercice 5. Le plan P est rapporté à un repère orthonormé et identifié à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par

$$M(x, y) \mapsto x + iy = z,$$

où z est appelé l'affixe de M. Soit $f : P\mathrm{rg}P$ qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe $z' = \frac{z-i}{z+i}$.

1. Sur quel sous ensemble de P, f est-elle définie ?
2. Calculer $|z'|$ pour z affixe d'un point M situé dans le demi plan ouvert

$$H := \{M(x, y) \in P \mid y > 0.\}?$$

3. En déduire l'image par f de H.

Exercice 6. Le plan P est rapporté à un repère orthonormé et on identifie P à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ par

$$M(x, y) \mapsto x + iy = z,$$

où z est appelé l'affixe de M. Soit $g : P\mathrm{rg}P$ qui à tout point M d'fixe $z \neq -1$ associe $g(M)$ d'affixe $z' = \frac{1-z}{1+z}$.

1. Calculer $z' + \bar{z'}$ pour $|z| = 1$.
2. En déduire l'image du cercle de rayon 1 de centre 0 privé du point de coordonnées $(-1, 0)$ par l'application g.

Exercice 7. Soit C la courbe d'équation $x^2 - xy + y^2 = 0$ dans le plan P rapporté à un repère orthonormé.

1. La courbe C a-t-elle des points d'intersection avec le rectangle ouvert R dont les sommets sont :

$$\begin{array}{rcl} A & = & (-3, 2) \\ B & = & (4, 2) \\ C & = & (4, -1) \\ D & = & (-3, -1). \end{array}$$

2. Même question pour le rectangle fermé R' de sommets :

$$\begin{array}{rcl} A' & = & (-1, 4) \\ B' & = & (2, 4) \\ C' & = & (2, 1) \\ D' & = & (-1, 1). \end{array}$$

Exercice 8. Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1$. Généraliser pour $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 1$.

Correction 8. En exprimant qu'un nombre complexe de module 1 peut s'écrire $e^{i\theta}$, on trouve $z = \frac{a-be^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$. On peut encore écrire $z = A + B\cot\frac{\theta}{2}$, où A et B sont indépendants de θ, ce qui montre que le point d'affixe z décrit une droite. Géométriquement, cette droite est bien entendu la médiatrice du segment qui joint les points d'affixes a et b.

Exercice 9. Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = k$ ($k > 0$, $k \neq 1$). Généraliser pour $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k$.

Correction 9. Méthode analogue à celle de l'exercice **??**. On trouve $z = \frac{a-bke^{i\theta}}{1-ke^{i\theta}}$. On peut vérifier que le point d'affixe z décrit le cercle dont un diamètre joint les points correspondant à $\theta = 0$ et à $\theta = \pi$ (vérifier en cherchant le milieu z_0 de ce segment et en étudiant $|z - z_0|$).

Exercice 10.
1. Soit A, B, C trois points du plan complexe dont les affixes sont respectivement a, b, c. On suppose que $a + jb + j^2c = 0$; montrer que ABC est un triangle équilatéral (j et j^2 sont les racines cubiques complexes de 1 — plus précisément $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$). Réciproque ?
2. ABC étant un triangle équilatéral direct du plan complexe, on construit les triangles équilatéraux directs BOD et OCE, ce qui détermine les points D et E (O est l'origine du plan complexe). Quelle est la nature du quadrilatère $ADOE$? Comparer les triangles OBC, DBA et EAC.

Correction 10.
1. Réciproque : $a + jb + j^2c = 0$ ou $a + j^2b + jc = 0$ (cela dépend de l'orientation du triangle).
2. $ADOE$ est un parallélogramme. Les trois triangles OBC, DBA et EAC sont directement isométriques, ce qui d'ailleurs se vérifie immédiatement à l'aide de rotations.

Exercice 11. Soit H une hyperbole équilatère de centre O, et M un point de H. Montrer que le cercle de centre M qui passe par le symétrique de M par rapport à O recoupe H en trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.
Indications : en choisissant un repère adéquat, H a une équation du type $xy = 1$, autrement dit en identifiant le plan de H au plan complexe, $z^2 - \bar{z}^2 = 4i$. En notant a l'affixe de M, le cercle a pour équation $|z - a|^2 = 4a\bar{a}$. On pose $Z = z - a$ et on élimine $\bar{Z}$ entre les équations du cercle et de l'hyperbole. En divisant par $Z + 2a$ pour éliminer la solution déjà connue du symétrique de M, on obtient une équation du type $Z^3 - A = 0$.

Exercice 12. Montrer que pour $u, v \in \mathbb{C}$, on a $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$. Donner une interprétation géométrique.

Indications 12. Pour l'interprétation géométrique cherchez le parallélogramme.

Correction 12.

$$|u+v|^2+|u-v|^2 = (u+v)(\bar{u}+\bar{v})+(u-v)(\bar{u}-\bar{v}) = 2u\bar{u}+2v\bar{v} = 2|u|^2+2|v|^2.$$

Géométriquement il s'agit de l'identité du parallélogramme. Les points d'affixes $0, u, v, u+v$ forment un parallélogramme. $|u|$ et $|v|$ sont les longueurs des cotés, et $|u+v|, |u-v|$ sont les longueurs des diagonales. Il n'est pas évident de montrer ceci sans les nombres complexes ! !

Exercice 13. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z') = \frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $z\overline{z'} + \overline{z}z' = 0$.
2. Montrer que $|z+z'|^2 = |z-z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2$.

Exercice 14.
1. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que : $\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1)$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que les images de 1, z, $1+z^2$ soient alignées.

Exercice 15. Soit $s = (1-z)(1-iz)$.

1. Déterminer l'ensemble des images des nombres complexes z tel que s soit réel.
2. Déterminer l'ensemble des images des nombres complexes z tel que s soit imaginaire pur.

Exercice 16.
1. Soit A un point du plan d'affixe $\alpha = a+ib$. Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z|^2 = \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z$.
2. Quelles conditions doivent vérifier les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2 pour que $\frac{z_1}{z_2}$ soit réel ?
3. Déterminer les nombres complexes z tels que les points du plan complexe d'affixes z, iz, i forment un triangle équilatéral.
4. Soit $z = a+ib$, mettre l'expression $\frac{z-1}{z+1}$ sous forme $A+iB$, . Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z telle que l'argument de $\frac{z-1}{z+1}$ soit $\frac{\pi}{2}$.

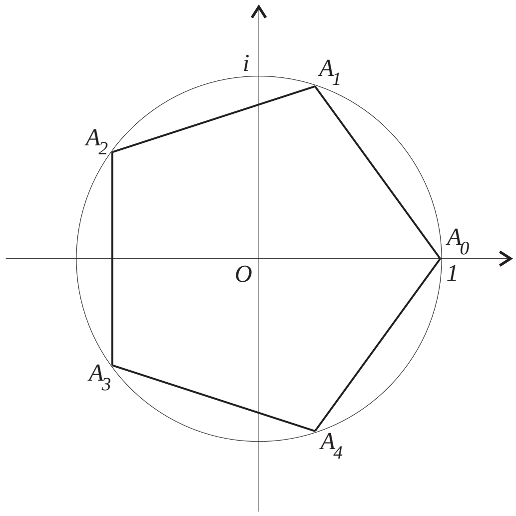
Exercice 17. Déterminer les nombres complexes z tels que le triangle ayant pour sommets les points d'affixes z, z^2, z^3 soit rectangle au point d'affixe z.

Exercice 18. Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les points d'affixes $z, \frac{1}{z}$ et $(1-z)$ soient sur un même cercle de centre O.

Exercice 19. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système :

$$|z-1| \leqslant 1, |z+1| \leqslant 1.$$

Exercice 20. Soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentagone régulier. On note O son centre et on choisit un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{OA_0}$, qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.



1. Donner les affixes $\omega_0, \ldots, \omega_4$ des points $A_0, \ldots, A_4$. Montrer que $\omega_k = {\omega_1}^k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Montrer que $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 = 0$.
2. En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est l'une des solutions de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
3. On considère le point B d'affixe -1. Calculer la longueur BA_2 en fonction de $\sin \frac{\pi}{10}$ puis de $\sqrt{5}$ (on remarquera que $\sin \frac{\pi}{10} = \cos \frac{2\pi}{5}$).
4. On considère le point I d'affixe $\frac{i}{2}$, le cercle $\mathcal{C}$ de centre I de rayon $\frac{1}{2}$ et enfin le point J d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la demi-droite $[BI)$. Calculer la longueur BI puis la longueur BJ.
5. **Application :** Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.

Correction 20.

1. Comme $(A_0, \ldots, A_4)$ est un pentagone régulier, on a $OA_0 = OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 = 1$ et $(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}) = \frac{2\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_2}) = \frac{4\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_3}) = -\frac{4\pi}{5}[2\pi], (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_4}) = -\frac{2\pi}{5}[2\pi],$. On en déduit : $\omega_0 = 1, \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}}, \omega_2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}, \omega_3 = e^{-\frac{4i\pi}{5}} = e^{\frac{6i\pi}{5}}, \omega_4 = e^{-\frac{2i\pi}{5}} = e^{\frac{8i\pi}{5}},$. On a bien $\omega_i = \omega_1^i$. Enfin, comme $\omega_1 \neq 0$, $1 + \omega_1 + \ldots + \omega_1^4 = \frac{1-\omega_1^5}{1-\omega_1} = \frac{1-1}{1-\omega_1} = 0$.
2. $\mathrm{Re}(1 + \omega_1 + \ldots + \omega_1^4) = 1 + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{4\pi}{5})$. Comme $\cos(\frac{4\pi}{5}) = 2\cos^2(\frac{2\pi}{5}) - 1$ on en déduit : $4\cos^2(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 = 0$. $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est donc bien une solution de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. Etudions cette équation : $\Delta = 20 = 2^2.5$. Les solutions sont donc $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Comme $\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$, on en déduit que $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3. $BA_2^2 = |\omega_2+1|^2 = |\cos(\frac{4\pi}{5})+i\sin(\frac{4\pi}{5})+1|^2 = 1+2\cos(\frac{4\pi}{5})+\cos^2(\frac{4\pi}{5})+\sin^2(\frac{4\pi}{5}) = 4\cos^2(\frac{2\pi}{5})$. Donc $BA_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
4. $BI = |i/2+1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. $BJ = BI - 1/2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
5. Pour tracer un pentagone régulier, on commence par tracer un cercle C_1 et deux diamètres orthogonaux, qui jouent le rôle du cercle passant par les sommets et des axes de coordonnées. On trace ensuite le milieu d'un des rayons : on obtient le point I de la question 4. On trace le cercle de centre I passant par le centre de C_1 : c'est le cercle $\mathcal{C}$. On trace le segment BI pour obtenir son point J d'intersection avec $\mathcal{C}$. On trace enfin le cercle de centre B passant par J : il coupe C_1 en A_2 et A_3, deux sommets du pentagone. Il suffit pour obtenir tous les sommets de reporter la distance A_2A_3 sur C_1, une fois depuis A_2, une fois depuis A_3. (en fait le cercle de centre B et passant par J', le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à J, coupe C_1 en A_1 et A_4, mais nous ne l'avons pas justifié par le calcul : c'est un exercice !)

Exercice 21 (Équations affines)**.**
1. Montrer que toute droite du plan admet pour équation complexe : $az + \overline{az} = b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{R}$.
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, a, b non tous deux nuls. Discuter la nature de $E = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } az + b\overline{z} = c\}$.

Correction 21.
1.
2. si $|a| \neq |b|$: une solution unique,
   si $|a| = |b|$: une droite ou $\varnothing$.

Exercice 22 (Transformation homographique)**.** Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}, z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$
1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{U} \setminus \{i\})$, $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$.

Correction 22.
1.
2. $\mathbb{U} \setminus \{1\}$, $i\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice 23 (Triangle équilatéral)**.** Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
1. $\{a, b, c\}$ est un triangle équilatéral.
2. j ou j^2 est racine de $az^2 + bz + c = 0$.
3. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.
4. $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$.

Exercice 24 (Sommets d'un carré)**.** Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} a + ib &= c + id \\ a + c &= b + d. \end{cases}$$

Que pouvez-vous dire des points d'affixes a, b, c, d ?
En déduire qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $(z-a)^4 = (z-b)^4 = (z-c)^4 = (z-d)^4$.

Correction 24. Les diagonales se coupent en leurs milieux, ont même longueur, et sont perpendiculaires $\Rightarrow$ carré.

Exercice 25 (Configuration de points)**.** Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que ...

1. z, z^2, z^4 sont alignés.
2. $1, z, z^2$ forment un triangle rectangle.
3. $z, \frac{1}{z}, -i$ sont alignés.

Correction 25.
1. $z \in \mathbb{R}$ ou $z \in -\frac{1}{2} + i\mathbb{R}$.
2. $z \in -1 + i\mathbb{R}$ ou $z \in i\mathbb{R}$ ou $\left|z + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.
3. $z \in i\mathbb{R}$ ou $|z - i| = \sqrt{2}$.

Exercice 26 ($a + b + c = 1$)**.** Trouver $a, b, c \in \mathbb{U}$ tels que $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ abc = 1. \end{cases}$

Correction 26. $(0, a, a + b, a + b + c = 1)$ forme un losange donc l'un des nombres vaut 1 et les deux autres sont opposés $\Rightarrow \{a, b, c\} = \{1, i, -i\}$.

Exercice 27 ($u + v + w = 0$)**.** Soient u, v, w trois complexes unitaires tels que $u + v + w = 0$. Montrer que $u = jv = j^2w$ ou $u = jw = j^2v$.

Exercice 28 ($z + 1/z = 2$)**.** Trouver les complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2$.

Correction 28. $z = x + iy \Rightarrow$ cercles $(\pm i, \sqrt{2})$ (laborieux).

Exercice 29 (Symétrique par rapport à une droite)**.** Les points A, B, M ayant pour affixes a, b, z, calculer l'affixe du symétrique de M par rapport à la droite (AB).

Correction 29. $z' = \frac{(b-a)\bar{z} + a\bar{b} - \bar{a}b}{\bar{b} - \bar{a}}$.

Exercice 30 (Orthocentre)**.** Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Montrer que si deux des rapports $\frac{d-a}{b-c}, \frac{d-b}{c-a}, \frac{d-c}{a-b}$ sont imaginaires purs, alors le troisième l'est aussi.

Correction 30. $d =$ orthocentre de abc.

Exercice 31 (Similitudes dans un triangle)**.** On donne un triangle ABC, un réel positif k et un angle θ. On note S_M la similitude directe de centre M, de rapport k et d'angle θ. Soit C_1 déduit de C par S_A, B_1 déduit de B par S_C, A_1 déduit de A par S_B. Montrer que les deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ ont même centre de gravité.

Exercice 32 (Centre du cercle circonscrit)**.** Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, affixes de points A, B, C non alignés. Calculer l'affixe du centre du cercle circonscrit à ABC en fonction de a, b, c.

Correction 32. $\omega = \frac{a(c\bar{c}-b\bar{b})+b(a\bar{a}-c\bar{c})+c(b\bar{b}-a\bar{a})}{a(\bar{c}-\bar{b})+b(\bar{a}-\bar{c})+c(\bar{b}-\bar{a})}$.

Exercice 33 (Sphère de $\mathbb{R}^3$)**.** Soient $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $u + v \neq 0$. On pose $x = \frac{1+uv}{u+v}$, $y = i\frac{1-uv}{u+v}$, $z = \frac{u-v}{u+v}$.

1. CNS sur u et v pour que x, y, z soient réels ?
2. On suppose cette condition réalisée. Montrer que le point $M(x, y, z)$ dans l'espace appartient à la sphère de centre O et de rayon 1.
3. A-t-on ainsi tous les points de cette sphère ?

Correction 33.

1. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tq $u = \alpha v$.
   $x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{|v|^2} \Leftrightarrow u = \frac{1}{\bar{v}}$.
2.
3. Il manque seulement les deux pôles.

Exercice 34 (**IT Une construction du pentagone régulier à la règle et au compas)**.**

1. On pose $z = e^{2i\pi/5}$ puis $a = z + z^4$ et $b = z^2 + z^3$. Déterminer une équation du second degré dont les solutions sont a et b et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
2. Le cercle de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ passant par le point M d'affixe i recoupe (Ox) en deux points I et J. Montrer que $\overline{OI}+\overline{OJ} = \overline{OI}.\overline{OJ} = -1$ et en déduire une construction à la règle et au compas, du pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 dont un des sommets est le point d'affixe 1.
3. La diagonale $[AC]$ d'un pentagone régulier $(ABCDE)$ est recoupée par deux autres diagonales en deux points F et G. Calculer les rapports $\frac{AF}{AC}$ et $\frac{FG}{AF}$.

Correction 34.

1. On a $a = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $b = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. 1, z, z^2, z^3 et z^4 sont les cinq racines cinquièmes de 1 dans $\mathbb{C}$. Par suite, $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$. Mais alors
$$a + b = z + z^2 + z^3 + z^4 = -1$$
et
$$ab = (z+z^4)(z^2+z^3) = z^3+z^4+z^6+z^7 = z+z^2+z^3+z^4 = -1 \text{ (car } z^5 = 1).$$
a et b sont donc les solutions de l'équation $X^2 + X - 1 = 0$ dont les racines sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Enfin, puisque $\frac{2\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$a > 0$. Par suite, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. D'autre part, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ et donc,

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = +\sqrt{1-\cos^2(\frac{2\pi}{5})} = \sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

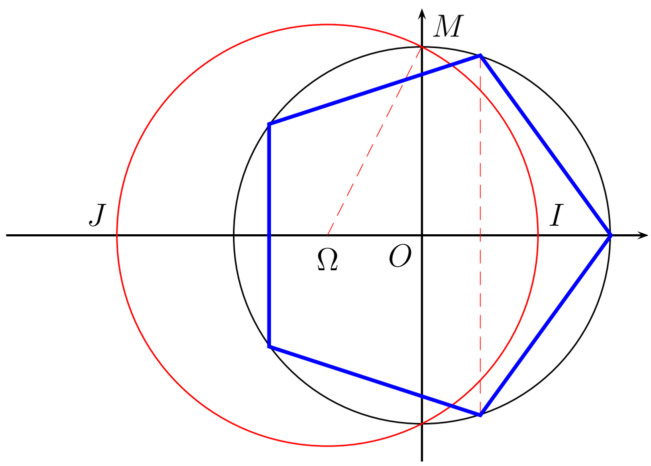
$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.}$$

De même, en remplaçant $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Enfin, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

2. Le rayon du grand cercle vaut, d'après le théorème de Pythagore :

$$R = \sqrt{\Omega O^2 + OM^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Donc $x_I = x_\Omega + R = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_J = x_\Omega - R = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Par suite, $x_I = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $x_J = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. Ceci montre que les médiatrices des segments $[O, I]$ et $[O, J]$ coupent le cercle de centre O et de rayon 1 en quatre des cinq sommets du pentagone.

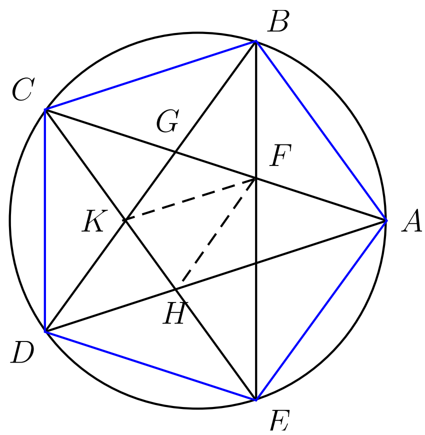


3. Posons $x = \frac{AF}{AC}$. D'après le théorème de Thales (je vous laisse vérifier les parallélismes),

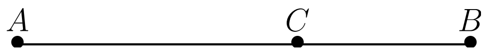
$$x = \frac{AF}{AC} = \frac{HK}{HC} = \frac{FG}{FC} = \frac{AC-2AF}{AC-AF} = \frac{1-2x}{1-x}.$$

Donc $x^2 - 3x + 1 = 0$ et puisque $x < 1$, $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Puis

$\frac{AG}{AC} = \frac{AC-AF}{AC} = 1-x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{FG}{AF} = \frac{AC-2AF}{AF} = \frac{1}{x}-2 = \frac{2}{3-\sqrt{5}}-2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.



Définition du *nombre d'or*.



On veut que C partage le segment $[A,B]$ de telle sorte que $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB}$ (« $\frac{\text{petit}}{\text{moyen}} = \frac{\text{moyen}}{\text{grand}}$ ») c'est-à-dire, en posant $a = AB$ et $x = AC$, $\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}$ ou encore $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{x}{a} - 1 = 0$ et donc, puisque $\frac{x}{a} > 0$, $\frac{x}{a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\boxed{\text{Le nombre d'or (ou proportion dorée) est le nombre } \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0,618...}$$

On peut aussi prendre pour le nombre d'or le rapport $\frac{a}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618...$

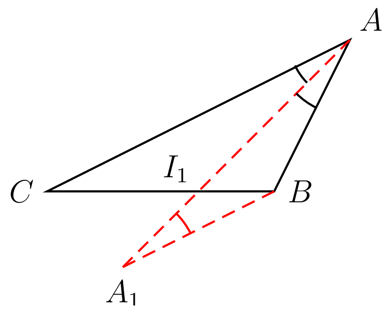
Exercice 35 (****). 1. Soit (ABC) un triangle dont les longueurs des côtés BC, CA et AB sont notées respectivement a, b et c. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle (ABC). Montrer que $I = \text{bar}\{A(a), B(b), C(c)\}$.

2. Déterminer z complexe tel que O soit le centre du cercle inscrit au triangle (PQR) dont les sommets ont pour affixes respectives z, z^2 et z^3.

Correction 35. 1. On note I_1 le point d'intersection de la bissectrice (Δ_1) de l'angle $\widehat{BAC}$ et de la droite (BC). La parallèle à (AC) passant par B coupe Δ_1 (puisque (AC) n'est pas parallèle à (Δ_1)) en un point A_1. Les angles alternes-internes $\widehat{CAA_1}$ et $\widehat{AA_1B}$ sont alors égaux. Puisque d'autre part, $\widehat{CAA_1} = \widehat{A_1AB}$, on en déduit que $\widehat{AA_1B} = \widehat{A_1AB}$ et donc que le triangle (ABA_1) est isocèle en B. D'après le théorème de Thalès, on a alors

$$\frac{I_1B}{I_1C} = \frac{A_1B}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b},$$

et donc puisque I_1 est entre B et C, $b\overrightarrow{I_1B} + c\overrightarrow{I_1C} = \vec{0}$, ou enfin $I_1 = \text{bar}\{B(b), C(c)\}$.



On a aussi bien sûr les deux autres égalités $I_2 = \text{bar}\{A(a), C(c)\}$ et $I_3 = \text{bar}\{A(a), B(b)\}$ où I_2 et I_3 sont les points d'intersection des deux autres bissectrices avec (AC) et (AB) respectivement. Soit alors $I' = \text{bar}\{A(a), B(b), C(c)\}$. D'après le théorème du barycentre partiel, on a

$$I' = \text{bar}\{A(a), I_1(b+c)\} = \text{bar}\{B(b), I_2(a+c)\} = \text{bar}\{C(c), I_3(a+b)\},$$

ce qui montre que I' est sur (AI_1), (BI_2) et (CI_3), c'est-à-dire sur les trois bissectrices. Par suite, $I' = I$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$z,\ z^2 \text{ et } z^3 \text{ ne sont pas deux à deux distincts} \Leftrightarrow z^2 = z \text{ ou } z^3 = z \text{ ou } z^3 = z^2 \Leftrightarrow z \in \{-1, 0, 1\}.$$

Ensuite, pour $z \notin \{-1, 0, 1\}$,

$$z,\ z^2 \text{ et } z^3 \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ z^3 - z = \lambda(z^2 - z) \Leftrightarrow \frac{z^3 - z}{z^2 - z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

Finalement, (z, z^2, z^3) est un « vrai » triangle si et seulement si z n'est pas réel. Soit alors z un complexe non réel.

$$\begin{aligned} O \text{ centre du cercle inscrit au triangle } (PQR) &\Leftrightarrow O = \text{bar}\{P(QR), Q(PR), R(PQ)\} \\ &\Leftrightarrow z|z^2 - z^3| + z^2|z - z^3| + z^3|z - z^2| = 0 \Leftrightarrow z.|z|. \\ &\Leftrightarrow |z| + z|1 + z| + z^2 = 0 \ (E) \ (\text{car } z \notin \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Ensuite,

$$|z|+z|1+z|+z^2=0 \Leftrightarrow (z+\frac{|z|}{z})+|1+z|=0 \Rightarrow z+\frac{|z|}{z}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow z+\frac{|z|}{z}=\bar{z}+\frac{|z|}{\bar{z}}$$
$$\Leftrightarrow z-\bar{z}-|z|\frac{z-\bar{z}}{z\bar{z}}=0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})(1-\frac{1}{|z|})=0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{|z|}=0 \text{ (car } z\neq\bar{z}$$
$$\Leftrightarrow |z|=1$$

Posons donc $z=e^{i\theta}$ où $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$. En reportant dans (E), on obtient

$$z \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow e^{i\theta}+e^{-i\theta}+|1+e^{i\theta}|=0 \Leftrightarrow 2\cos\theta+|e^{i\theta/2}|.|2\cos\frac{\theta}{2}|=0$$
$$\Leftrightarrow \cos\theta+|\cos\frac{\theta}{2}|=0 \Leftrightarrow 2|\cos\frac{\theta}{2}|^2+|\cos\frac{\theta}{2}|-1=0 \Leftrightarrow |\cos\frac{\theta}{2}| \text{ est solution de}$$
$$\Leftrightarrow \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\in\left\{\frac{1}{2},-1\right\} \Leftrightarrow \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\theta=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta$$
$$\Leftrightarrow z\in\{j,j^2\}$$

Les nombres complexes solutions sont donc j et j^2.

Exercice 36 (***I)**.** Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c. Montrer que :

$$ABC \text{ équilatéral} \Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ est racine de l'équation } az^2+bz+c=0$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc \Leftrightarrow \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0.$$

Correction 36.

$$(A,B,C) \text{ équilatéral} \Leftrightarrow C=r_{A,\pi/3}(B) \text{ ou } C=r_{A,-\pi/3}(B) \Leftrightarrow c-a=(-j^2)(b-a) \text{ ou } c-a=(-j)(b$$
$$\Leftrightarrow (-1-j^2)a+j^2b+c=0 \text{ ou } (-1-j)a+jb+c=0 \Leftrightarrow ja+j^2b+c=0 \text{ ou } j^2$$
$$\Leftrightarrow (j^2)^2a+j^2b+c=0 \text{ ou } j^2a+jb+c=0 \Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ sont solutions de l'équatio}$$

Ensuite

$$(A,B,C) \text{ équilatéral} \Leftrightarrow ja+j^2b+c=0 \text{ ou } j^2a+jb+c=0$$
$$\Leftrightarrow (ja+j^2b+c)(j^2a+jb+c)=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+(j+j^2)(ab+ac+bc)=0$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc,$$

puis

$$(A,B,C) \text{ équilatéral} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$$
$$\Leftrightarrow -a^2+ab+ac-bc-b^2+bc+ba-ac-c^2+ca+cb-ab=0$$
$$\Leftrightarrow (c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)=0 \Leftrightarrow \frac{(c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)+(}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0.$$

Exercice 37 (**T)**.** Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on pose $Z = \frac{1+z}{1-z}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixes z tels que

1. $|Z| = 1$.
2. $|Z| = 2$.
3. $Z \in \mathbb{R}$.
4. $Z \in i\mathbb{R}$.

Correction 37. A- Solutions algébriques.] Pour $z \in \mathbb{C}$, posons $z = x+iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $$|Z| = 1 \Leftrightarrow \frac{|1+z|^2}{|1-z|^2} = 1 \Leftrightarrow (1+x)^2+y^2 = (1-x)^2+y^2 \text{ et } (x,y) \neq (1,0) \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

   L'ensemble cherché est la droite (Oy).

2. $$\begin{aligned} |Z| = 2 &\Leftrightarrow (1+x)^2 + y^2 = 4((1-x)^2 + y^2) \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0 \text{ et } (x,y) \neq (1,0) \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0 \text{ et } (x,y) \neq (1,0) \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9} \text{ et } (x,y) \neq (1,0) \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}. \end{aligned}$$

   L'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ et de rayon $\frac{4}{3}$.

3. $$\begin{aligned} Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Z = \overline{Z} &\Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \\ &\Leftrightarrow (1+z)(1-\bar{z}) = (1-z)(1+\bar{z}) \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow z - \bar{z} = \bar{z} - z \text{ et } z \neq 1 \\ &\Leftrightarrow z = \bar{z} \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ et } z \neq 1. \end{aligned}$$

   L'ensemble cherché est la droite (Ox) privé du point $(1, 0)$.

4. $$\begin{aligned} Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Z = -\overline{Z} &\Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = -\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \Leftrightarrow (1+z)(1-\bar{z}) = -(1-z)(1+\bar{z}) \text{ et } z \neq 1 \\ &\Leftrightarrow 1 - z\bar{z} = -1 + \bar{z} \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ et } z \neq 1. \end{aligned}$$

   L'ensemble cherché est donc le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(1, 0)$.

B- Solutions géométriques. Soient A et B les points d'affixes respectives -1 et 1 et $\mathcal{E}$ l'ensemble cherché. Soit M un point du plan distinct de B d'affixe z.

1.

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow |z+1| = |z-1| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \in \text{med}[AB] = (Oy).$$

2. Soit $\Omega = \text{bar}(A(1), B(-4))$. On a $x_\Omega = \frac{-1}{5}(x_A - 4x_B) = \frac{5}{3}$ et $y_\Omega = \frac{-1}{5}(y_A - 4y_B) = 0$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow |z+1|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow AM^2 = 4BM^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 - 4\overrightarrow{BM}^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M})^2 - 4(\overrightarrow{B\Omega} + \overrightarrow{\Omega M})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -3\overrightarrow{\Omega M}^2 + 2(\overrightarrow{A\Omega} - 4\overrightarrow{B\Omega}).\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{A\Omega}^2 - 4\overrightarrow{B\Omega}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{1}{3}(\Omega A^2 - 4\Omega B^2) \end{aligned}$$

Or, $\Omega A^2 = (\frac{5}{3}+1)^2 = \frac{64}{9}$ et $\Omega B^2 = (\frac{5}{3}-1)^2 = \frac{4}{9}$. Par suite,

$$\frac{1}{3}(\Omega A^2 - 4\Omega B^2) = \frac{1}{3}(\frac{64}{9} - \frac{16}{9}) = \frac{16}{9}.$$

Ainsi,

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \Omega M = \frac{4}{3},$$

et on retrouve le cercle de centre $\Omega(\frac{5}{3}, 0)$ et de rayon $\frac{4}{3}$.

3.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 0\ (\pi) \Leftrightarrow M = A \text{ ou } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0\ (\pi) \\ \Leftrightarrow M \in (AB) \setminus \{B\}. \end{aligned}$$

et on retrouve la droite (Ox) privée du point $(1,0)$.

4.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\pi) \Leftrightarrow M = A \text{ ou } \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\pi) \\ \Leftrightarrow M \text{ est sur le cercle de diamètre } [AB] \text{ privé de } B. \end{aligned}$$

et on retrouve le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(1,0)$.

Exercice 38 (*T)**.** Nature et éléments caractéristiques de la transformation d'expression complexe :

1. $z' = z + 3 - i$
2. $z' = 2z + 3$
3. $z' = iz + 1$

4. $z' = (1-i)z + 2 + i$

Correction 38. Soit f la transformation considérée.

1. f est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(3,-1)$.
2. $\omega = 2\omega + 3 \Leftrightarrow \omega = -3$. f est l'homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(-3,0)$.
3. $\omega = i\omega + 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}(1+i)$. Comme $i = e^{i\pi/2}$, f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
4. $\omega = (1-i)\omega + 2 + i \Leftrightarrow \omega = 1 - 2i$. Comme $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, f est la similitude de centre $\Omega(1,-2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.