Année 2014

Exercices de mathématiques

Exercice 1. 1. Montrer que le polynôme $P(X) = X^5 - X^2 + 1$ admet une unique racine réelle et que celle-ci est irationnelle.

2. Montrer que le polynôme $Q(X) = 2X^3 - X^2 - X - 3$ a une racine rationnelle (qu'on calculera). En déduire sa décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2. Soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients entiers premiers entre eux (c'est à dire tels que les seuls diviseurs communs à tous les a_i soient -1 et 1). Montrer que si $r = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux est une racine rationnelle de P alors p divise a_0 et q divise a_n.

Exercice 3. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme de degré n.

1. Montrer que si P est irréductible dans $\mathbb{Q}$ alors il n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P, de multiplicité strictement plus grande que $\frac{n}{2}$.Montrer que λ est rationnel.

Exercice 4. Montrer que le polynôme $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ admet une racine multiple. Application : déterminer les racines du polynôme $3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$.

Exercice 5. Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. Vérifier que i est racine de P.
2. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$
3. Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles : $P = X^4 + X^2 + 1,\ Q = X^{2n} + 1,\ R = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1, S = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$ (on cherchera les racines doubles de S).

Exercice 6. Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$, sans déterminer ses racines, le polynôme $P = X^4 + 1$, en produit de facteurs irréductibles.

Correction 6.
$$\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)$$

Exercice 7. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $X - a$ divise $X^n - a^n$.

Exercice 8. Décomposer $X^{12} - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9. Prouver que B divise A, où :
$A = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$ et $B = X^2 + X + 1$,
$A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ et $B = X(X+1)(2X+1)$,
$A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = (X-1)^2$.

Exercice 10. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $n \in \mathbb{Z}$; notons $m = P(n)$; ($\deg(P) \geqslant 1$).

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{Z}, m$ divise $P(n+km)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P dans $\mathbb{Z}[X]$, non constant, tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(n)$ soit premier.

Exercice 11. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $S, T \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = S^2 + T^2$ (on utilisera la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$). *Indications :*

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer $c, d \in \mathbb{R}$ tels que : $ab = c^2 - d^2$, vérifier que $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$.
2. Résoudre le problème pour P de degré 2.
3. Conclure.

Exercice 12. Soit $\theta \in \mathbb{R}$; on suppose $\sin n\theta \neq 0$. Déterminer les racines du polynôme $P = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \sin k\theta \, X^k$. Vérifier que ces racines sont toutes réelles.

Exercice 13. Soit $a \in \mathbb{C}$, $P \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$, premiers entre eux. On suppose que a est racine double de $P^2 + Q^2$. Montrer que a est racine de $P'^2 + Q'^2$.

Exercice 14. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme

$$nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$$

Correction 14. L'ordre de multiplicité est 2.

Exercice 15. Pour quelles valeurs de a le polynôme $(X+1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

Correction 15. Soit $x \in \mathbb{R}$; x est une racine multiple de P si et seulement si $P(x)=0$ et $P'(x)=0$:

$$P(x)=P'(x)0 \iff \left\{\begin{array}{l}(x+1)^7-x^7-a=0\\ 7(x+1)^6-7x^6=0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}(x+1)x^6-x^7-a=0 \qquad \text{en utilisant la deuxième équation}\\ (x+1)^6=x^6\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}x^6=a\\ (x+1)^3=\pm x^3 \qquad \text{en prenant la racine carrée}\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}x^6=a\\ x+1=\pm x \qquad \text{en prenant la racine cubique}\end{array}\right.$$

qui admet une solution ($x=-\frac{1}{2}$) si et seulement si $a=\frac{1}{64}$.

Exercice 16. Montrer que le polynôme X^3+2 est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Factoriser ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 17. Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles.

1. X^3-3.
2. $X^{12}-1$.

Correction 17. 1. $\left\{\begin{array}{rcl}X^3-3 &=& (X-\sqrt[3]{3})(X^2+\sqrt[3]{3}\,X+\sqrt[3]{9})\\ &=& (X-\sqrt[3]{3})(X+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2})(X+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}{2}).\end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcl}X^{12}-1 &=& (X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)\times\\ && \quad (X^2-\sqrt{3}\,X+1)(X^2+\sqrt{3}\,X+1)\\ &=& (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)\times\\ && \quad \big(X-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\big)\big(X-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\big)\big(X-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\big)\big(X-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\big)\times\\ && \quad \big(X-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\big)\big(X-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\big)\big(X-\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\big)\big(X-\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\big).\end{array}\right.$

Exercice 18. Quelle est la décomposition de X^6+1 en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$? Dans $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 19. Soit P le polynôme X^4+2X^2+1. Déterminer les multiplicités des racines i et $-i$, de deux façons différentes : soit en décomposant P dans $\mathbb{C}[X]$, soit en utilisant le polynôme dérivé de P.

Exercice 20. Soit le polynôme $P=X^8+2X^6+3X^4+2X^2+1$.

1. Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de P ?
3. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 21. Soit E le polynôme du troisième degré : aX^3+bX^2+cX+d avec $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$, et soit x_1, x_2, x_3 ses trois racines dans $\mathbb{C}$. Trouver un polynôme ayant pour racines x_1x_2, x_2x_3 et x_3x_1.

Exercice 22. Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 - 2X^2 + X + 3$. Calculer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

Exercice 23. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer qu'il y a un nombre fini de polynômes unitaires de degré n à coefficients entiers ayant toutes leurs racines de module inférieur ou égal à 1.

Exercice 24. Soit $n \geqslant 2$ et $P_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$. P_n a-t-il une racine double ?

Exercice 25. Résoudre les équations :

1. $P'P'' = 18P$ où $P \in \mathbb{R}[X]$.
2. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$.

Exercice 26. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

1. Montrer qu'il en est de même de P'.
2. Montrer que le polynôme $P^2 + 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 27. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.

1. Quel est le degré de P ?
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^* \ \prod\limits_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}(\dfrac{k\pi}{2p+1}) = \dfrac{1}{\sqrt{2p+1}}$.

Exercice 28. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^6 + 1$.
2. $X^9 + X^6 + X^3 + 1$.

Correction 28.
1. $X^6+1 = -\left(X^2+1\right)\left(X^2+X\sqrt{3}+1\right)\left(-X^2+X\sqrt{3}-1\right)$.
2. $X^9+X^6+X^3+1 = -\left(X^2+1\right)\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+X\sqrt{3}+1\right)\left(-X^2+X\sqrt{3}-1\right)(X+1)$.

Exercice 29 (Factorisation de $X^n - 1$)**.** Factoriser $X^n - 1$ sur $\mathbb{C}$.

1. En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
2. Calculer également $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$.
3. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $\prod_{0 \leqslant k, \ell < n, k \neq \ell} (\omega^k - \omega^\ell)$.

Correction 29.
1. $\frac{n}{2^{n-1}}$.
2. $\frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}$.
3. $-(-n)^n$.

Exercice 30 (Mines MP 1999)**.** Montrer que $\prod_{k=0}^{n-1}(\omega^{2k} - 2\omega^k \cos\theta + 1) = 2(1 - \cos(n\theta))$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Correction 30. $\omega^{2k}-2\omega^k\cos\theta+1=(\omega^k-e^{i\theta})(\omega^k-e^{-i\theta})$ et $\prod_{k=0}^{n-1}(\omega^k-x)=(-1)^n(x^n-1)$.

Exercice 31 (Racines de j et j^2)**.** Montrer que si $p\leqslant n$, alors $X^{2^p}+X^{2^{p-1}}+1$ divise $X^{2^n}+X^{2^{n-1}}+1$.

Exercice 32 ($X^2-2X\cos\theta+1$ divise $X^{2n}-2X^n\cos(n\theta)+1$)**.** Montrer que $X^2-2X\cos\theta+1$ divise $X^{2n}-2X^n\cos n\theta+1$. Pour $\sin\theta\neq 0$, chercher le quotient.

Correction 32. $X^{2n}-2X^n\cos n\theta+1=(X^n-e^{in\theta})(X^n-e^{-in\theta})$.
$Q=\left(\sum_{k=0}^{n-1}X^k e^{i(n-1-k)\theta}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n-1}X^l e^{-i(n-1-\ell)\theta}\right)$
$=\sum_{k=0}^{n-1}X^k\left(\sum_{p=0}^{k}e^{i(k-2p)\theta}\right)+\sum_{k=n}^{2n-2}X^k\left(\sum_{p=k-n+1}^{n-1}e^{i(k-2p)\theta}\right)$
$=\sum_{k=0}^{n-1}X^k\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}+\sum_{k=n}^{2n-2}X^k\frac{\sin(2n-k-1)\theta}{\sin\theta}$.

Exercice 33 ($X^2-2X\cos\theta+1$ divise $X^{n+1}\cos(n-1)\theta-X^n\cos n\theta-X\cos\theta+1$)**.** Montrer que $X^2-2X\cos\theta+1$ divise $X^{n+1}\cos(n-1)\theta-X^n\cos n\theta-X\cos\theta+1$, puis déterminer le quotient.

Correction 33. Division de proche en proche : $Q=\sum_{k=0}^{n-1}X^k\cos k\theta$.

Exercice 34 (X^8+X^4+1 divise $X^{8n}+pX^{4n}+q$)**.** Donner une CNS sur $p,q\in\mathbb{C}$ pour que X^8+X^4+1 divise $X^{8n}+pX^{4n}+q$ ($n\in\mathbb{N}^*$ fixé).

Correction 34. $\iff X^2+X+1\mid X^{2n}+pX^n+q \iff j^{2n}+pj^n+q=0$.

Exercice 35 (Racines rationnelles)**.** Factoriser $P(X)=3X^4+11X^3+20X^2+7X-5$, sachant qu'il existe des racines rationnelles.

Correction 35. $(X+1)(3X-1)(X^2+3X+5)$.

Exercice 36 (Équation de degré 4 tq $x_1x_2=5$)**.** Trouver les racines de $P(X)=X^4-3X^3+6X^2-15X+5$ sachant que deux racines, x_1 et x_2, vérifient : $x_1x_2=5$ (on introduira le polynôme $Q=X^4P(5/X)$).

Correction 36. On calcule $\mathrm{pgcd}(P(X),Q(X))=X^2+5$.
$\Rightarrow x_1=i\sqrt{5}$ et $x_2=-i\sqrt{5}$.
On obtient alors : $P(X)=(X^2+5)(X^2-3X+1)$.
Les deux dernières racines sont $x_3=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_4=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 37 (Racines multiples)**.** Factoriser $P=X^5-13X^4+67X^3-171X^2+216X-108$ sachant qu'il admet une racine triple.

Correction 37. $P=(X-2)^2(X-3)^3$.

Exercice 38 (Recherche d'une racine triple)**.** Soit $P=X^5+aX^2+15X-6i$. Trouver $a\in\mathbb{C}$ tel que P a une racine triple dans $\mathbb{C}$. Factoriser alors P.

Correction 38. $a = 10i$. Racines : $i, i, i, \frac{-3i+\sqrt{15}}{2}, \frac{-3i-\sqrt{15}}{2}$.

Exercice 39 (Ensi P 90)**.** Donner une condition sur λ pour que l'équation : $x^4 - 2x^3 + \lambda x^2 + 2x - 1 = 0$ ait une racine au moins triple.

Correction 39. $\lambda = 0$, $x = 1$.

Exercice 40 ($x_1 + x_2 = 1$)**.** Soient $p, q \in \mathbb{C}$ et $P(X) = X^5 + pX + q$. Donner une CNS sur p et q pour que deux des racines de P aient pour somme 1.

Correction 40. P doit être divisible par $X^2 - X + r$, $\Rightarrow r^2 - 3r + p + 1 = 2r^2 - r + q = 0$.
On calcule le pgcd de ces expressions $\Rightarrow$ CNS : $4p^2 - 4pq + q^2 + 3p + 11q - 1 = 0$.

Exercice 41 (Factorisation)**.** Factoriser

$$1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{X(X-1)\cdots(X-n)}{(n+1)!}.$$

Correction 41. $= (-1)^{n+1}\frac{(X-1)\cdots(X-n)\big(X-(n+1)\big)}{(n+1)!}$.

Exercice 42 ($X - 1 \mid P(X^n) \Rightarrow X - 1 \mid P$)**.** Soient $P, Q \in K[X]$.

1. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X - 1$, alors P est divisible par $X - 1$ $\quad (n \in \mathbb{N})$.
2. Montrer que si $P(X^3) + XQ(X^3)$ est divisible par $X^2 + X + 1$, alors P et Q sont divisibles par $X - 1$.

Exercice 43 (Racines de $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (\sin k\theta) X^k$)**.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sin n\theta \neq 0$. Démontrer que le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\sin k\theta) X^k$ a toutes ses racines réelles.

Correction 43. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) = \operatorname{Im}\big((1 + xe^{i\theta})^n\big)$.
Donc $P(x) = 0 \iff \exists\ k \in \{0, \dots, n-1\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que : $1 + xe^{i\theta} = \lambda e^{ik\pi/n}$.
On obtient $x_k = \frac{\sin(k\pi/n)}{\sin(\theta - k\pi/n)}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Exercice 44. Démontrer que $1 + X + X^n$ n'a que des racines simples.

Exercice 45 (P' divise P)**.** Quels sont les polynômes $P \in K[X]$ tels que P' divise P ?

Correction 45. $P = a(X - b)^{\alpha}$.

Exercice 46 (Équations fonctionnelles)**.** Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que ...

1. $P(X^2) = P(X-1)P(X+1)$.
2. $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

3. $P(X)P(X+2)+P(X^2)=0$.

Correction 46. 1. si $P(x)=0$, alors $P\big((x-1)^2\big)=P\big((x+1)^2\big)=0$.
On a toujours $|x|<\max\{|x-1|,|x+1|\}$ donc, s'il y a une racine de module >1, il n'y a pas de racine de module maximal $\Rightarrow P=0$.
Or $\max\{|x-1|,|x+1|\}\geqslant 1$ avec égalité ssi $x=0$. Donc $P=0$ ou $P=1$.

2. Si x est racine, alors x^2 et $(x+1)^2$ le sont aussi.
$\Rightarrow |x|=0$ ou $1 \Rightarrow |x+1|=0$ ou $1 \Rightarrow x\in\{0,-1,j,j^2\}$.
$x=0$ ou $x=-1\Rightarrow P(1)=0$: exclus.
Donc $P=a(X-j)^\alpha(X-j^2)^\beta$. On remplace $\Rightarrow P=(X^2+X+1)^\alpha$.

3. Seule racine possible : $1 \Rightarrow P=-(X-1)^k$.

Exercice 47 (P à racines réelles simples => P^2+a^2 à racines simples)**.** Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ dont toutes les racines sont réelles.

1. Démontrer que les racines de P' sont aussi réelles.
2. En déduire que : $\forall\ a\in\mathbb{R}^*$, les racines de P^2+a^2 sont simples.

Exercice 48 (P et Q ont même module)**.** Soient $P,Q\in\mathbb{C}[X]$ tels que : $\forall\ z\in\mathbb{C},\ |P(z)|=|Q(z)|$. Démontrer qu'il existe $u\in\mathbb{C}, |u|=1$ tel que $P=uQ$.

Correction 48. Mêmes racines avec les mêmes multiplicités.

Exercice 49 (Valeur moyenne)**.** Soient $z_0,z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$ tels que : $\forall\ P\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$, on a $P(z_0)=\frac{P(z_1)+\cdots+P(z_n)}{n}$.
On note $\Phi(X)=\prod_{i=1}^n(X-z_i)$.

1. Calculer $\frac{\Phi(z_0)}{z_0-z_k}$.
2. En déduire que $\Phi(X)=\frac{(X-z_0)\Phi'(X)}{n}+\Phi(z_0)$.
3. Démontrer que $z_1,\dots,z_n$ sont les sommets d'un polygone régulier de centre z_0.
4. Réciproque ?

Correction 49. 1. $P=\frac{\Phi}{X-z_k}\Rightarrow\frac{\Phi(z_0)}{z_0-z_k}=\frac{\Phi'(z_k)}{n}$.

2. Les deux membres sont égaux en $z_0,\dots,z_n$.
3. Décomposer Φ sur la base $\big((X-z_0)^k\big)$.
4. $\sum_k e^{2ikp/n}=0$ pour $p<n\Rightarrow$ OK.

Exercice 50 ($P(x)\neq 14$)**.** Soit $P\in\mathbb{Z}[X]$ tel que $P(x)=7$ pour au moins 4 valeurs distinctes $x\in\mathbb{Z}$.
Démontrer que : $\forall\ x\in\mathbb{Z}$, on a $P(x)\neq 14$.

Exercice 51 (Nombre algébrique rationnel)**.** Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On dit que α est *algébrique* s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.
Le polynôme unitaire de plus bas degré vérifiant $P(\alpha) = 0$ est appelé : *polynôme minimal de* α.

1. Soit α algébrique de polynôme minimal P. Démontrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et que α est racine simple de P.
2. Soit α algébrique, et $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. On suppose que la multiplicité de α dans P est strictement supérieure à $\frac{1}{2}\deg P$. Démontrer que $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Exercice 52 ($P(\sqrt{2}) = 0$)**.** Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P\big(\sqrt{2}\big) = 0$. Démontrer que $-\sqrt{2}$ est aussi racine de P avec la même multiplicité que $\sqrt{2}$.

Exercice 53 (Polynôme minimal de $2\cos(2\pi/7)$)**.** Montrer que $x = 2\cos\frac{2\pi}{7}$ est racine de $X^3 + X^2 - 2X - 1$. Quelles sont les autres racines ?

Correction 53. $x = z + \frac{1}{z}$ avec $z^6 + z^5 + \dots + 1 = 0$.
Autres racines : $2\cos\frac{4\pi}{7}$ et $2\cos\frac{6\pi}{7}$.

Exercice 54 (Racines réelles simples)**.** Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ dont les racines sont réelles simples.

1. Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a $P(x)P''(x) \leqslant P'^2(x)$.
2. Démontrer que : $\forall\, k \in \{1, \dots, n-1\},\ a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2$.

Correction 54.

1. Soit $P(x) = a_n \prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$. On a : $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x-x_k)^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{P'}{P}\right)(x) = \frac{P'^2 - PP''}{P^2}(x)$.
2. Pour $k = 1, x = 0$, on a : $a_0 a_2 \leqslant \frac{1}{2}a_1^2$.
   Pour k quelconque : on applique le cas précédent à $P^{(k-1)}$ dont les racines sont encore réelles simples :
   $(k-1)!a_{k-1} \times \frac{(k+1)!}{2}a_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}(k!a_k)^2 \Rightarrow a_{k-1}a_{k+1} \leqslant \frac{k}{k+1}a_k^2$.

Exercice 55 (Méthode de Ferrari)**.** Soit $P = X^4 - 6X^3 + 7X^2 - 18X - 8$. Trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(Q) = \deg(P - Q^2) = 2$, et $P - Q^2$ a une racine double. Factoriser alors P sur $\mathbb{R}$.

Correction 55. $Q = X^2 - 3X + 1$, $P = \left(X - \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(X - \frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)(X^2 - X + 4)$.

Exercice 56 (Pgcd $\neq 1 \Leftrightarrow$ racine commune)**.** Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si P et Q n'ont pas de racine en commun dans $\mathbb{C}$.

Exercice 57 (Mines MP 2001)**.** Soit K un corps de caractéristique p.

1. Montrer que $\sigma\ :\ x \mapsto x^p$ est un morphisme de corps.

2. Montrer que σ est surjectif si et seulement si tout polynôme $P \in K[X]$ irréductible vérifie $P' \neq 0$.

Correction 57. 1. p est premier car K est intègre.

On a $1^p = 1$, $(xy)^p = x^p y^p$ (un corps est commutatif) et $(x+y)^p = x^p + y^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k x^k y^{p-k} = x^p + y^p$ car p divise C_p^k si $1 \leqslant k \leqslant p-1$.

2. Remarquer que $P' = 0 \Leftrightarrow P \in K[X^p]$.

On suppose σ surjectif. Soit $P(X) = Q(X^p) = a_0 + \dots + a_k X^{kp}$ un polynôme non constant à dérivée nulle. Il existe $b_0, \dots, b_k$ tels que $b_i^p = a_i$. Alors $P(X) = Q(X)^p$ est réductible.

On suppose que tout polynôme irréductible a une dérivée non nulle. Soit $a \in K$ et $P(X) = X^p - a$. $P' = 0$ donc P est réductible. Soit Q un facteur unitaire irréductible de $X^p - a$. Alors Q^p et $X^p - a$ ont Q en facteur commun donc leur pgcd, D, est non constant. Mais Q^p et $X^p - a$ appartiennent à $K[X^p]$ donc D, obtenu par l'algorithme d'Euclide aussi, d'où $D = X^p - a$ et $X^p - a$ divise Q^p. Par unicité de la décomposition de Q^p en facteurs irréductibles, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $X^p - a = Q^r$. Par examen du degré on a $r = p$ donc $\deg Q = 1$, $Q = X - b$ et finalement $b^p = a$.

Exercice 58 (Centrale MP 2001)**.** Soit $P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $V(x)$ le nombre de changements de signe dans la suite $(P(x), P'(x), \dots, P^{(n)}(x))$ en convenant de retirer les termes nuls. Soient $\alpha < \beta$ deux réels non racines de P. Montrer que le nombre de racines de P dans $[\alpha, \beta]$, comptées avec leur ordre de multiplicité, a même parité que $V(\alpha) - V(\beta)$ et que $V(\alpha) - V(\beta) \geqslant 0$.

Correction 58. $V(\alpha)$ est pair si et seulement si $P(\alpha)$ et $P^{(n)}(\alpha)$ ont même signe, de même pour $V(\beta)$. Comme $P^{(n)}(\alpha) = P^{(n)}(\beta)$ on en déduit que $V(\alpha) - V(\beta)$ est pair si et seulement si $P(\alpha)$ et $P(\beta)$ ont même signe, donc si et seulement si P a un nombre pair de racines dans $[\alpha, \beta]$.
Décroissance de V : V est constant sur tout intervalle ne contenant aucune racine de $P, P', \dots, P^{(n-1)}$. Considérons $x_0 \in [\alpha, \beta[$ tel que $P^{(k)}(x_0) \neq 0$, $P^{(k+1)}(x_0) = \dots = P^{(\ell-1)}(x_0) = 0$ et $P^{(\ell)}(x_0) \neq 0$. Alors pour x proche de x_0 avec $x > x_0$, $P^{(k)}(x)$ a même signe que $P^{(k)}(x_0)$ et $P^{(k+1)}(x), \dots, P^{(\ell)}(x)$ ont même signe que $P^{(\ell)}(x_0)$ donc les nombres de changements de signe dans les sous-suites $(P^{(k)}(x), \dots, P^{(\ell)}(x))$ et $(P^{(k)}(x_0), \dots, P^{(\ell)}(x_0))$ sont égaux. De même si $P(x_0) = \dots = P^{(\ell-1)}(x_0) = 0$ et $P^{(\ell)}(x_0) \neq 0$. Ceci prouve que $V(x_0^+) = V(x_0)$ pour tout $x_0 \in [\alpha, \beta[$.
On considère à présent $x_0 \in]\alpha, \beta]$ tel que $P^{(k)}(x_0) \neq 0$, $P^{(k+1)}(x_0) = \dots = P^{(\ell-1)}(x_0) = 0$ et $P^{(\ell)}(x_0) \neq 0$. Alors pour x proche de x_0 avec $x < x_0$ la sous-suite $(P^{(k)}(x), \dots, P^{(\ell)}(x))$ a $\ell - k - 1$ changements de signe si $P^{(k)}(x_0)$ et $P^{(\ell)}(x_0)$ ont même signe, $\ell - k$ changements de signe sinon tandis que la sous-suite $(P^{(k)}(x_0), \dots, P^{(\ell)}(x_0))$ en a un ou zéro. De même, si $P(x_0) =$

$\cdots = P^{(\ell-1)}(x_0) = 0$ et $P^{(\ell)}(x_0) \neq 0$ on trouve ℓ changements de signe pour $(P(x), \dots, P^{(\ell)}(x))$ et zéro pour $(P(x_0), \dots, P^{(\ell)}(x_0))$ donc dans tous les cas $V(x_0^-) \geqslant V(x_0)$. Ceci achève la démonstration.

Exercice 59 (X MP* 2004)**.** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré d dont toutes les racines sont de module strictement inférieur à 1. Pour $\omega \in \mathbb{U}$ on note $\overline{P}$ le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P et $Q(X) = P(X) + \omega X^d \overline{P}(1/X)$. Montrer que les racines de Q sont de module 1.

Correction 59. Pour $z \in \mathbb{U}$, on a $Q(z) = 0 \Leftrightarrow P(z)/z^d\overline{P}(\overline{z}) = -\omega$. Comme $\overline{P}(\overline{z}) = \overline{P(z)}$, les deux membres ont même module pour tout $z \in \mathbb{U}$, il faut et il suffit donc que les arguments soient égaux modulo 2π. Pour $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| < 1$, une détermination continue de $\operatorname{Arg}(e^{i\theta} - a)$ augmente de 2π lorsque θ varie de 0 à 2π donc, vu l'hypothèse sur les racines de P, une détermination continue de $\operatorname{Arg}(P(z)/z^d\overline{P(z)}\,)$ augmente de $2\pi d$ lorsque θ varie de 0 à 2π. Une telle détermination prend donc au moins d fois une valeur congrue à $\operatorname{Arg}(-\omega)$ modulo 2π, ce qui prouve que Q admet au moins d racines distinctes dans $\mathbb{U}$.

Exercice 60 (X MP* 2005)**.** Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $|a_0| + \cdots + |a_{n-1}| < a_n$. Soit $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos(nx)$. Montrer que les zéros de f sont tous réels (cad. si $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $f(x) \neq 0$).

Correction 60. $f(2k\pi/n) > 0 > f((2k+1)\pi/n)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ donc f admet $2n$ racines dans $[0, 2\pi[$. En posant $z = e^{ix}$, $z^n f(x)$ est un polynôme en z de degré $2n$ ayant $2n$ racines sur le cercle unité ; il n'en n'a pas ailleurs.

Exercice 61 (Factorisation sur $\mathbb{R}$ de $X^8 + X^4 + 1$)**.** Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Correction 61. $(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X\sqrt{3} + 1)(X^2 + X\sqrt{3} + 1)$.

Exercice 62 (Polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$)**.** Démontrer que $1 + (X-1)^2(X-3)^2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Correction 62. Racines : $\alpha = 2 + \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, $\overline{\alpha}$, $\beta = 2 - \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, $\overline{\beta}$.
Factorisation de P sur $\mathbb{R}$: $P = (X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2)(X^2 - 2\operatorname{Re}(\beta)X + |\beta|^2)$ et les facteurs sont irrationnels.

Exercice 63 (Polynômes positifs sur $\mathbb{R}$)**.** Soit $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \exists\, Q, R \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P = Q^2 + R^2\}$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication.
2. Montrer que $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0\}$.
3. (Centrale MP 2000, avec Maple) $P = 65X^4 - 134X^3 + 190X^2 - 70X + 29$. Trouver A et B dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

Correction 63. 1. $P = |Q + iR|^2$.

2. Factoriser P.
3. Avec Maple : $P = \frac{1}{65}Q\overline{Q}$ avec $Q = 65X^2 + (49i - 67)X + (42 + 11i)$ et Q est irréductible sur $Q[i]$. Donc si $P = A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$ avec A, B polynômes à coefficients entiers alors, quitte à changer B en $-B$, il existe $\lambda \in \mathbb{Q}[i]$ tel que : $A + iB = \lambda Q$ et $A - iB = \overline{\lambda Q}$ d'où :

$$\begin{aligned} 2A &= 65(\lambda + \overline{\lambda})X^2 + ((49i - 67)\lambda - (49i + 67)\overline{\lambda})X + ((42 + 11i)\lambda + (42 - 11i)\overline{\lambda}) \\ 2iB &= 65(\lambda - \overline{\lambda})X^2 + ((49i - 67)\lambda + (49i + 67)\overline{\lambda})X + ((42 + 11i)\lambda - (42 - 11i)\overline{\lambda}) \\ \lambda\overline{\lambda} &= 65. \end{aligned}$$

En particulier $65\lambda \in \mathbb{Z}[i]$, écrivons $\lambda = \frac{u+iv}{65}$ avec $u, v \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} A &= uX^2 - \frac{67u + 49v}{65}X + \frac{42u - 11v}{65} \\ B &= vX^2 + \frac{49u - 67v}{65}X + \frac{11u + 42v}{65} \\ u^2 + v^2 &= 65. \end{aligned}$$

$67u+49v$ est divisible par 65 si et seulement si $u \equiv 8v (\mathrm{mod}\, 65)$ et dans ce cas les autres numérateurs sont aussi multiples de 65. La condition $u^2 + v^2 = 65$ donne alors $v = \pm 1, u = \pm 8$ d'où :

$$A = \pm(8X^2 - 9X + 5), \qquad B = \pm(X^2 + 5X + 2).$$

Exercice 64 (Lemme de Gauss)**.** Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On appelle *contenu de P* le pgcd des coefficients de P (notation : $\mathrm{cont}(P)$).

1. Soient $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ avec $\mathrm{cont}(P) = 1$, et $R = PQ$. Soit p un facteur premier de $\mathrm{cont}(R)$.
   (a) Si p est premier avec le coefficient constant de P, Démontrer que p divise tous les coefficients de Q.
   (b) Si p divise le coefficient constant de P, se ramener au cas précédent.
   (c) En déduire que $\mathrm{cont}(Q) = \mathrm{cont}(R)$.
2. Lorsque $\mathrm{cont}(P) \neq 1$, trouver $\mathrm{cont}(PQ)$.
3. Application : Soit $R \in \mathbb{Z}[X]$, et $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $R = PQ$. Montrer qu'il existe $P_1, Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$ proportionnels à P et Q et tels que $R = P_1Q_1$.
   (*cad : un polynôme à coefficients entiers réductible sur $\mathbb{Q}$ est aussi réductible sur $\mathbb{Z}$*)

Exercice 65 (Polynômes irréductibles sur $\mathbb{Z}$)**.** Démontrer que $X^4 + X + 1$ et $X^6 + X^2 + 1$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 66 (Polynômes irréductibles sur $\mathbb{Z}$)**.** Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ distincts.

1. Montrer que $(X - a_1) \ldots (X - a_n) - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. Même question avec $(X - a_1) \ldots (X - a_n) + 1$, n impair.

Correction 66.

1. Si $P = QR$ alors $Q(a_i)R(a_i) = -1 \Rightarrow Q(a_i) = -R(a_i) = \pm 1$, donc $Q + R$ a n racines, donc est nul, et $P = -Q^2$: contradiction pour $x \to \infty$.
2. Même raisonnement : $P = Q^2$, donc $Q^2 - 1 = (Q - 1)(Q + 1) = (X - a_1) \ldots (X - a_n)$.
   On répartit les facteurs entre $Q - 1$ et $Q + 1$: $n = 2p$, contradiction.

Exercice 67 (Critère d'irréductibilité d'Eisenstein)**.** Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0X^0$ et p un nombre premier tel que :

$$a_0 \equiv 0 (\operatorname{mod} p), \quad \ldots, \quad a_{n-1} \equiv 0 (\operatorname{mod} p), \quad a_0 \not\equiv 0 (\operatorname{mod} p^2).$$

Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Correction 67. Soit $P = QR$ avec $Q = X^{n_1} + b_{n_1-1}X^{n_1-1} + \cdots + b_0X^0$ et $R = X^{n_2} + c_{n_2-1}X^{n_2-1} + \cdots + c_0X^0$.
Par hypothèse sur $a_0 = b_0c_0$, p divise un et un seul des entiers b_0, c_0. Supposons que p divise $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$: alors $a_k \equiv b_kc_0 (\operatorname{mod} p)$ donc p divise b_k. On aboutit à « p divise le coefficient dominant de Q », ce qui est absurde.

Exercice 68 (Irréductibilité de $X^p - a$)**.** Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$, $a \in K$ et $p \in \mathbb{N}$ premier. Montrer que le polynôme $X^p - a$ est irréductible sur K si et seulement s'il n'a pas de racine dans K.

Indications 68. Si $X^p - a = PQ$ avec $P, Q \in K[X]$ unitaires non constants, factoriser P dans $\mathbb{C}$ et considérer $P(0)$.

Correction 68. On suppose $a \neq 0$ et $X^p - a = PQ$ avec $P, Q \in K[X]$ unitaires non constants. Soit $n = \deg(P) \in [[1, p - 1]]$ et $b = (-1)^n P(0) \in K$. b est le produit de cetraines p-èmes de a, donc $b^p = a^n$. De plus $n \wedge p = 1$; soit $nu + pv = 1$ une relation de Bézout. On a alors $b^{pu} = a^{nu} = a^{1-pv}$ d'où $a = (b^u/a^v)^p$ donc $b^u/a^v \in K$ est racine de $X^p - a$.

Exercice 69 (**T)**.** Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le polynôme $(X + 1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Correction 69. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(X+1)^n - X^n - 1 \text{ est divisible par } X^2+X+1 &\Leftrightarrow j \text{ et } j^2 \text{ sont racines de } (X+1)^n - X^n - 1\\ &\Leftrightarrow j \text{ est racine de } (X+1)^n - X^n - 1\\ &(\text{car } (X+1)^n - X^{n-1} \text{ est dans } \mathbb{R}[X])\\ &\Leftrightarrow (j+1)^n - j^n - 1 = 0 \Leftrightarrow (-j^2)^n - j^n - 1 = 0.\end{aligned}$$

Si $n \in 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -3 \neq 0$.
Si $n \in 1+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$.
Si $n \in 2+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = j - j^2 - 1 = 2j \neq 0$.
Si $n \in 3+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -3 \neq 0$.
Si $n \in 4+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = j^2 - j - 1 = 2j^2 \neq 0$.
Si $n \in 5+6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -j - j^2 - 1 = 0$.
En résumé, $(X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par X^2+X+1 si et seulement si n est dans $(1+6\mathbb{Z}) \cup (5+6\mathbb{Z})$.

Exercice 70 (***)**.** Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe deux polynômes R et S à coefficients réels tels que $P = R^2 + S^2$.

Correction 70. Soit P un polynôme non nul à coefficients réels.
Pour tout réel x, on peut écrire

$$P(x) = \lambda \prod_{i=1}^{k} (x-a_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{l} ((x-z_j)(x-\overline{z_j}))^{\beta_j},$$

où λ est un réel non nul, k et l sont des entiers naturels, les a_i sont des réels deux à deux distincts, les α_i et les β_i des entiers naturels et les $(x-z_j)(x-\overline{z_j})$ des polynômes deux à deux premiers entre eux à racines non réelles.
Tout d'abord, pour tout réel x, $\prod_{j=1}^{l}((x-z_j)(x-\overline{z_j}))^{\beta_j} > 0$ (tous les trinomes du second degré considérés étant unitaires sans racines réelles.)
Donc, $(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda \prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i} \geqslant 0)$.
Ensuite, si $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} P(x) \geqslant 0$ ce qui impose $\lambda > 0$. Puis, si un exposant α_i est impair, P change de signe en a_i, ce qui contredit l'hypothèse faite sur P. Donc, $\lambda > 0$ et tous les α_i sont pairs. Réciproquement, si $\lambda > 0$ et si tous les α_i sont pairs, alors bien sûr, $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.
Posons $A = \sqrt{\lambda} \prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i/2}$. A est un élément de $\mathbb{R}[X]$ car $\lambda > 0$ et car les α_i sont des entiers pairs. Posons ensuite $Q_1 = \prod_{j=1}^{l}(x-z_j)^{\beta_j}$ et $Q_2 = \prod_{j=1}^{l}(x-\overline{z_j})^{\beta_j}$. Q_1 admet après développement une écriture de la forme $Q_1 = B + iC$ où B et C sont des polynômes à coefficients réels. Mais alors, $Q_2 = B - iC$. Ainsi,

$$P = A^2 Q_1 Q_2 = A^2(B+iC)(B-iC) = A^2(B^2+C^2) = (AB)^2 + (AC)^2 = R^2 + S^2,$$

où R et S sont des polynômes à coefficients réels.

Exercice 71 (****I Théorème de Lucas)**.** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1. Montrer que les racines de P' sont barycentres à coefficients positifs des racines de P (on dit que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P). Indication : calculer $\frac{P'}{P}$.

Correction 71. Soit P un polynôme de degré n supèrieur ou égal à 2.
Posons $P = \lambda(X - z_1)(X - z_2)...(X - z_n)$ où λ est un complexe non nuls et les z_k des complexes pas nécessairement deux à deux distincts.

$$P' = \lambda \sum_{i=1}^{n} (\prod_{j \neq i} (X - z_j)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P}{X - z_i},$$

et donc

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - z_i}.$$

Soit alors z une racine de P' dans $\mathbb{C}$. Si z est racine de P (et donc racine de P d'ordre au moins 2) le résultat est clair. Sinon,

$$0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - z_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{z - z_i}}{|z - z_i|^2}.$$

En posant $\lambda_i = \frac{1}{|z-z_i|^2}$, ($\lambda_i$ est un réel strictement positif) et en conjugant, on obtient $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(z - z_i) = 0$ et donc

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \mathrm{bar}(z_1(\lambda_1), ..., z_n(\lambda_n)).$$

Exercice 72 (***)**.** Trouver tous les polynômes divisibles par leur dérivée.

Correction 72. On suppose que $n = \deg P \geqslant 1$.
On pose $P = \lambda(X - z_1)(X - z_2)...(X - z_n)$ où λ est un complexe non nul et les z_k sont des complexes pas nécessairement deux à deux distincts.
D'après l'exercice précédent, $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-z_k}$.
Si P est divisible par P', $\exists(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}/\ P = (aX + b)P'$ et donc $\exists(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}/\ \frac{P'}{P} = \frac{1}{aX+b}$ ce qui montre que la fraction rationelle $\frac{P'}{P}$ a exactement un et un seul pôle complexe et donc que les z_k sont confondus.
En résumé, si P' divise P, $\exists(a, \lambda) \in \mathbb{C}^2/\ P = \lambda(X - a)^n$ et $\lambda \neq 0$.
Réciproquement, si $P = \lambda(X - a)^n$ avec $\lambda \neq 0$, alors $P' = n\lambda(X - a)^{n-1}$ divise P.
Les polynômes divisibles par leur dérivée sont les polynômes de la forme $\lambda(X - a)^n$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 73 (**T)**.** Déterminer $a \in \mathbb{C}$ tel que $P = X^5 - 209X + a$ admette deux zéros dont le produit vaut 1.

Correction 73. a est solution du problème si et seulement si $X^5-209X+a$ est divisible par un polynôme de la forme $X^2+\alpha X+1$. Mais

$$X^5-209X+a=(X^2+\alpha X+1)(X^3-\alpha X^2+(\alpha^2-1)X-(\alpha^3-2\alpha))+(\alpha^4-3\alpha^2-208)X+a+(\alpha^3-2\alpha).$$

Donc a est solution $\Leftrightarrow \exists \alpha\in\mathbb{C}/ \left\{\begin{array}{l}\alpha^4-3\alpha^2-208=0\\ a=-\alpha^3+2\alpha\end{array}\right.$. Mais, $\alpha^4-3\alpha^2-208=0 \Leftrightarrow \alpha^2\in\{-13,16\} \Leftrightarrow \alpha\in\{-4,4,i\sqrt{13},-i\sqrt{13}\}$ et la deuxième équation fournit $a\in\{56,-56,15i\sqrt{13},-15i\sqrt{13}\}$.

Exercice 74 (***T). Soit $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant 5}$ la famille des racines de $P=X^5+2X^4-X-1$. Calculer $\sum_{k=1}^{5}\frac{a_k+2}{a_k-1}$.

Correction 74. On note que $P(1)=1\neq 0$ et donc que l'expression proposée a bien un sens.

$$\sum_{k=1}^{5}\frac{a_k+2}{a_k-1}=\sum_{k=1}^{5}(1+\frac{3}{a_k-1})=5-3\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{1-a_k}=5-3\frac{P'(1)}{P(1)}=5-3\frac{12}{1}=-31.$$

Exercice 75. Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^6-2X^3\cos a+1$ où a est un réel donné dans $[0,\pi]$.

Correction 75.

$$\begin{aligned}P&=X^6-2X^3\cos a+1=(X^3-e^{ia})(X^3-e^{-ia})\\&=(X-e^{ia/3})(X-je^{ia/3})(X-j^2e^{ia/3})(X-e^{-ia/3})(X-je^{-ia/3})(X-j^2e^{-ia/3})\\&=(X^2-2X\cos\frac{a}{3}+1)(X^2-2X\cos(\frac{a}{3}+\frac{2\pi}{3})+1)(X^2-2X\cos(\frac{a}{3}-\frac{2\pi}{3})+1)\end{aligned}$$

Il reste à se demander 1) si les facteurs précédents sont irréductibles sur $\mathbb{R}$ et 2) si ces facteurs sont deux à deux distincts.
Les trois facteurs de degré 2 ont un discriminant réduit du type $\Delta'=\cos^2\alpha-1=-\sin^2\alpha$ et Δ' est nul si et seulement si α est dans $\pi\mathbb{Z}$.
Les cas particuliers sont donc ($\frac{a}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ et donc $a=0$) et ($\frac{a+2\pi}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ et donc $a=\pi$) et ($\frac{a-2\pi}{3}$ est dans $\pi\mathbb{Z}$ ce qui n'a pas de solution dans $[0,\pi]$).
1er cas. Si $a=0$.

$$P=(X^2-2X+1)(X^2+X+1)(X^2+X+1)=(X-1)^2(X^2+X+1)^2.$$

2ème cas. Si $a=\pi$, en remplaçant X par $-X$ on obtient :

$$P=(X+1)^2(X^2-X+1)^2.$$

3ème cas. Si a est dans $]0,\pi[$, les trois facteurs de degré 2 sont irréductibles sur $\mathbb{R}$ et clairement deux à deux distincts. Donc

$$P=(X^2-2X\cos\frac{a}{3}+1)(X^2-2X\cos\frac{a+2\pi}{3}+1)(X^2-2X\cos\frac{a-2\pi}{3}+1).$$

Exercice 76. Former une équation du sixième degré dont les racines sont les $\sin\frac{k\pi}{7}$ où $k\in\{-3,-2,-1,1,2,3\}$ puis montrer que ces six nombres sont irrationnels.

Correction 76. Pour k élément de $\{-3,-2,-1,1,2,3\}$, posons $x_k=\sin\frac{k\pi}{7}$ (les x_k sont deux à deux opposés). Il faut calculer les coefficients du polynôme

$$\begin{aligned}P&=(X-\sin\frac{\pi}{7})(X-\sin\frac{2\pi}{7})(X-\sin\frac{3\pi}{7})(X+\sin\frac{\pi}{7})(X+\sin\frac{2\pi}{7})(X+\sin\frac{3\pi}{7})\\&=(X^2-\sin^2\frac{\pi}{7})(X^2-\sin^2\frac{2\pi}{7})(X^2-\sin^2\frac{3\pi}{7})\\&=(X^2-\frac{1}{2}(1-cos\frac{2\pi}{7}))(X^2-\frac{1}{2}(1-cos\frac{4\pi}{7}))(X^2-\frac{1}{2}(1-cos\frac{6\pi}{7}))\\&=\frac{1}{8}Q(-2X^2+1)\end{aligned}$$

où $Q(Y)=(\cos\frac{2\pi}{7}-Y)(\cos\frac{4\pi}{7}-Y)(\cos\frac{8\pi}{7}-Y)$.
Posons $\omega=e^{2i\pi/7}$.

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}&=\frac{1}{8}(\omega+\omega^6)(\omega^2+\omega^5)(\omega^3+\omega^4)=\frac{1}{8}(6+\omega^7+\omega^9+\omega^{10}+\omega^{11}+\omega^{12}+\omega^{14}+\omega^{1}\\&=\frac{1}{8}(\omega^6+\omega^7+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+1+\omega)=\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}&=\frac{1}{4}((\omega+\omega^6)(\omega^2+\omega^5)+(\omega+\omega^6)(\omega^3+\omega^4)+(\omega^3+\omega\\&=\frac{1}{4}(2\omega+2\omega^2+2\omega^3+2\omega^4+2\omega^5+2\omega^6)=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Enfin,

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{1}{2}(\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6)=-\frac{1}{2}$$

Donc, $Q=\frac{1}{8}-(-\frac{1}{2})Y+(-\frac{1}{2})Y^2-Y^3=\frac{1}{8}(-8Y^3-4Y^2+4Y+1)$ puis,

$$P=\frac{1}{64}(-8(-2X^2+1)^3-4(-2X^2+1)^2+4(-2X^2+1)+1)=\frac{1}{64}(64X^6-112X^4+54X^2-7).$$

Une équation du 6ème degré dont les solutions sont les sin est $64x^6-112x^4+54x^2-7=0$.
Maintenant, si $r=$ (p entier relatif non nul, q entier naturel non nul, p et q premiers entre eux) est une racine rationnelle de cette équation, alors, d'après l'exercice **??**, p divise -7 et q divise 64 et donc p est élément de $\{1,-1,7,-7\}$ et q est élément de $\{1,2,4,8,16,32,64\}$. On vérifie aisément qu'aucun des rationnels r obtenu n'est racine de P et donc les racines de P sont irrationnelles.

Exercice 77. Déterminer λ et μ complexes tels que les zéros de $z^4-4z^3-36z^2+\lambda z+\mu$ soient en progression arithmétique. Résoudre alors l'équation.

Correction 77. Posons $P=X^4-4X^3-36X^2+\lambda X+\mu$.

$$\begin{aligned}
(\lambda,\mu) \text{ solution} &\Leftrightarrow \exists (z,r)\in\mathbb{C}^2/ \text{ les racines de } P \text{ soient } z, z+r, z+2r, z+3r\\
&\Leftrightarrow \exists (z,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}\sigma_1=4\\ \sigma_2=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists (z,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}4z+6r=4\\ z(3z+6r)+(z+r)(2z+5r)+(z+2r)(z+3r)=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists (z,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}2z+3r=2\\ 6z^2+18rz+11r^2=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists (z,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}z=1-\frac{3}{2}r\\ 6(1-\frac{3}{2}r)^2+18(1-\frac{3}{2}r)r+11r^2=-36\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists (z,r)\in\mathbb{C}^2/ \left\{\begin{array}{l}-\frac{5}{2}r^2+42=0\\ z=1-\frac{3}{2}r\\ \sigma_3=-\lambda\\ \sigma_4=\mu\end{array}\right.
\end{aligned}$$

D'où la solution (les deux valeurs opposées de r fournissent évidemment la même progression arithmétique) $r=2\sqrt{\frac{21}{5}}$ puis $z=1-3\sqrt{\frac{21}{5}}$ puis les racines $z_1=1-3\sqrt{\frac{21}{5}}$, $z_2=1-\sqrt{\frac{21}{5}}$, $z_3=1+\sqrt{\frac{21}{5}}$ et $z_4=1+3\sqrt{\frac{21}{5}}$, obtenues pour

$$\lambda=z_1z_2z_3z_4=(1-3\sqrt{\frac{21}{5}})(1-\sqrt{\frac{21}{5}})(1+\sqrt{\frac{21}{5}})(1+3\sqrt{\frac{21}{5}})=(1-9\frac{21}{5})(1-\frac{21}{5})=\frac{2994}{25},$$

et

$$\mu = (1-3\sqrt{\frac{21}{5}})(1-\frac{21}{5}) + (1-9\frac{21}{5})(1-\sqrt{\frac{21}{5}}) + (1-9\frac{21}{5})(1+\sqrt{\frac{21}{5}}) + (1-\frac{21}{5})(1+3\sqrt{\frac{21}{5}})$$
$$= 2(1-\frac{21}{5}) + 2(1-9\frac{21}{5}) = 2(2-10\frac{21}{5}) = -80$$

Exercice 78. Soient x_1, x_2, x_3 les zéros de X^3+2X-1. Calculer $x_1^4+x_2^4+x_3^4$.

Correction 78. Pour $i \in \{1,2,3\}$, on a $x_i^3 + 2x_i - 1 = 0$ et donc $x_i^4 + 2x_i^2 - x_i = 0$. En additionnant ces trois égalités, on obtient $S_4 + 2S_2 - S_1 = 0$ et donc

$$S_4 = -2((\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + \sigma_1 = (-2)(-2.2) = 8.$$

Exercice 79. Soient x_1,..., x_8 les zéros de X^8+X^7-X+3. Calculer $\sum \frac{x_1}{x_2x_3}$ (168 termes).

Correction 79. Pour chacun des 8 numérateurs possibles, il y a $C_7^2 = 21$ dénominateurs et donc au total, $8 \times 21 = 168$ termes.

$$\sum \frac{x_1}{x_2x_3} = \sum \frac{x_1^2x_4x_5x_6x_7x_8}{x_1x_2...x_8} = \frac{1}{\sigma_8}\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6 = \frac{1}{3}\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6.$$

Ensuite,

$$\sigma_1\sigma_6 = (\sum x_1)(\sum x_1x_2x_3x_4x_5x_6) = \sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6 + \sum x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7,$$

et donc,

$$\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6 = \sigma_1\sigma_6 - \sigma_7 = (-1)(0) - 1 = -1.$$

Donc, $\sum \frac{x_1}{x_2x_3} = -\frac{1}{3}$.

Exercice 80. 1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

$a)$ X^3-3 $\quad b)$ $X^{12}-1$ $\quad c)$ X^6+1 $\quad d)$ $X^9+X^6+X^3+1$

2. Factoriser les polynômes suivants :

$a)$ $X^2+(3i-1)X-2-i$ $\quad b)$ $X^3+(4+i)X^2+(5-2i)X+2-3i$

Correction 80.

1. (a) $X^3-3=(X-3^{1/3})(X^2+3^{1/3}X+3^{2/3})$ où $X^2+3^{1/3}X+3^{2/3}$ est irréductible sur $\mathbb{R}$. On cherche ses racines complexes pour obtenir la factorisation sur $\mathbb{C}$:

$$X^3-3=(X-3^{1/3})(X+\frac{1}{2}3^{1/3}-\frac{i}{2}3^{5/6})(X+\frac{1}{2}3^{1/3}+\frac{i}{2}3^{5/6})$$

(b) Passons à $X^{12}-1$. $z=re^{i\theta}$ vérifie $z^{12}=1$ si et seulement si $r=1$ et $12\theta\equiv 0[2\pi]$, on obtient donc comme racines complexes les $e^{ik\pi/6}$ $(k=0,\ldots,11)$, parmi lesquelles il y en a deux réelles (-1 et 1) et cinq couples de racines complexes conjuguées ($e^{i\pi/6}$ et $e^{11i\pi/6}$, $e^{2i\pi/6}$ et $e^{10i\pi/6}$, $e^{3i\pi/6}$ et $e^{9i\pi/6}$, $e^{4i\pi/6}$ et $e^{8i\pi/6}$, $e^{5i\pi/6}$ et $e^{7i\pi/6}$), d'où la factorisation sur $\mathbb{C}[X]$:

$$\begin{aligned}X^{12}-1= &\ (X-1)(X+1)(X-e^{i\pi/6})(X-e^{11i\pi/6})(X-e^{2i\pi/6})\\ &(X-e^{10i\pi/6})(X-e^{3i\pi/6})(X-e^{9i\pi/6})(X-e^{4i\pi/6})\\ &(X-e^{8i\pi/6})(X-e^{5i\pi/6})(X-e^{7i\pi/6})\end{aligned}$$

Comme $(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})=(X^2-2\cos(\theta)X+1)$, on en déduit la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned}X^{12}-1 &= (X-1)(X+1)(X^2-2\cos(\pi/6)X+1)\\ &\quad(X^2-2\cos(2\pi/6)X+1)(X^2-2\cos(3\pi/6)X+1)\\ &\quad(X^2-2\cos(4\pi/6)X+1)(X^2-2\cos(5\pi/6)X+1)\\ &= (X-1)(X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)\\ &\quad(X^2-X+1)(X^2+1)(X^2+X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)\end{aligned}$$

(c) Pour X^6+1, $z=re^{i\theta}$ vérifie $z^6=-1$ si et seulement si $r=1$ et $6\theta\equiv\pi[2\pi]$, on obtient donc comme racines complexes les $e^{i(\pi+2k\pi)/6}$ $(k=0,\ldots,5)$. D'où la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\begin{aligned}X^6+1 &= (X-e^{i\pi/6})(X-e^{3i\pi/6})(X-e^{5i\pi/6})(X-e^{7i\pi/6})\\ &\quad(X-e^{9i\pi/6})(X-e^{11i\pi/6})\end{aligned}$$

Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les paires de racines complexes conjuguées :

$$X^6+1=(X^2+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)$$

(d) $X^9+X^6+X^3+1=P(X^3)$ où $P(X)=X^3+X^2+X+1=\frac{X^4-1}{X-1}$: les racines de P sont donc les trois racines quatrièmes de l'unité différentes de 1 (i, $-i$, -1) et

$$\begin{aligned}X^9+X^6+X^3+1 &= P(X^3)\\ &= (X^3+1)(X^3-i)(X^3+i)\\ &= (X^3+1)(X^6+1)\end{aligned}$$

On sait déjà factoriser X^6+1, il reste donc à factoriser le polynôme $X^3+1=(X+1)(X^2-X+1)$, où X^2-X+1 n'a pas de racine réelle. Donc

$$\begin{aligned} X^9+X^6+X^3+1 &= (X+1)(X^2-X+1)(X^2+1) \\ &\quad (X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1) \end{aligned}$$

Pour la factorisation sur $\mathbb{C}$: les racines de X^2-X+1 sont $e^{i\pi/3}$ et $e^{5i\pi/3}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} X^9+X^6+X^3+1 &= (X+1)(X-e^{i\pi/3})(X-e^{5i\pi/3}) \\ &\quad (X-e^{i\pi/6})(X-e^{3i\pi/6})(X-e^{5i\pi/6}) \\ &\quad (X-e^{7i\pi/6})(X-e^{9i\pi/6})(X-e^{11i\pi/6}) \end{aligned}$$

2. (a) Pour $X^2+(3i-1)X-2-i$, on calcule le discriminant

$$\Delta=(3i-1)^2-4(-2-i)=-2i$$

et on cherche les racines carrées (complexes!) de Δ : $w=a+ib$ vérifie $w^2=\Delta$ si et seulement si $w=1-i$ ou $w=-1+i$. Les racines du polynômes sont donc $\frac{1}{2}(-(3i-1)\pm(1-i))$ et $P(X)=(X+i)(X-1+2i)$.

(b) Pour $X^3+(4+i)X^2+(5-2i)X+2-3i$: -1 est racine évidente, et $P(X)=(X+1)(X^2+(3+i)X+2-3i)$. Le discriminant du polynôme $X^2+(3+i)X+2-3i$ vaut $\Delta=18i$, ses deux racines carrées complexes sont $\pm(3+3i)$ et finalement on obtient $P(X)=(X+1)(X-i)(X+3+2i)$.

Exercice 81. Trouver tous les polynômes P qui vérifient la relation

$$P(X^2)=P(X)P(X+1)$$

Indications 81. Montrer que si P est un polynôme non constant vérifiant la relation, alors ses seules racines possibles sont 0 et 1.

Correction 81. Si P est constant égal à c, il convient si et seulement si $c=c^2$, et alors $c\in\{0;1\}$.
Dans la suite on suppose P non constant. Notons Z l'ensemble des racines de P. On sait que Z est un ensemble non vide, fini.
Analyse
Si $z\in Z$, alors $P(z)=0$ et la relation $P(X^2)=P(X)P(X+1)$ implique $P(z^2)=0$, donc $z^2\in Z$. En itérant, on obtient $z^{2k}\in Z$ (pour tout $k\in\mathbb{N}^*$). Si $|z|>1$, la suite $(|z^{2k}|)_k$ est strictement croissante donc Z contient une infinité d'éléments, ce qui est impossible. De même si $0<|z|<1$, la suite $(|z^{2k}|)_k$ est strictement décroissante, ce qui est impossible pour la même

raison. Donc les éléments de Z sont soit 0, soit des nombres complexes de module 1.
De plus, si $P(z)=0$, alors toujours par la relation $P(X^2)=P(X)P(X+1)$, on a que $P((z-1)^2)=0$ donc $(z-1)^2 \in Z$. Par le même raisonnement que précédemment, alors ou bien $z-1=0$ ou bien $|z-1|=1$.
En écrivant $z=a+ib$, on vérifie que $|z|=|z-1|=1$ équivaut à $z=e^{\pm i\pi/3}$. Finalement, $Z \subset \left\{0,1,e^{i\pi/3},e^{-i\pi/3}\right\}$. Or si $e^{\pm i\pi/3}$ était racine de P, alors $(e^{\pm i\pi/3})^2$ devrait aussi être dans Z, mais ce n'est aucun des quatre nombres complexes listés ci-dessus. Donc ni $e^{i\pi/3}$, ni $e^{-i\pi/3}$ ne sont dans Z.
Les deux seules racines (complexes) possibles sont donc 0 et 1. Conclusion : le polynôme P est nécessairement de la forme $\lambda X^k(X-1)^\ell$.

Synthèse
La condition $P(X^2)=P(X)P(X+1)$ devient

$$\lambda X^{2k}(X^2-1)^\ell = \lambda^2 X^k(X-1)^\ell(X+1)^k X^\ell$$

qui équivaut à $\begin{cases} \lambda^2=\lambda \\ 2k=k+\ell \\ k=\ell \end{cases}$.
Autrement dit $k=\ell$ et $\lambda=1$ (puisqu'on a supposé P non constant).
Conclusion Finalement, les solutions sont le polynôme nul et les polynômes $(X^2-X)^k$, $k\in\mathbb{N}$ ($k=0$ donne le polynôme 1).

Exercice 82. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P\in\mathbb{C}[X]$ tel que

$$\forall z\in\mathbb{C}^* \qquad P\left(z+\frac{1}{z}\right)=z^n+\frac{1}{z^n}$$

Montrer alors que toutes les racines de P sont réelles, simples, et appartiennent à l'intervalle $[-2,2]$.

Indications 82. Pour l'existence, preuve par récurrence sur n. Pour les racines, montrer que $P(x)=2\cos(n\arccos(x/2))$.

Correction 82.

1. Commençons par remarquer que si P et Q sont deux polynômes qui conviennent, alors pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, $P\left(z+\frac{1}{z}\right)-Q\left(z+\frac{1}{z}\right)=0$. En appliquant cette égalité à $z=e^{i\theta}$, on obtient $(P-Q)(2\cos\theta)=0$. Le polynôme $P-Q$ a une infinité de racines, donc il est nul, ce qui montre $P=Q$.
2. Montrons l'existence de P par récurrence forte sur n :
   - Pour $n=0$, $P=2$ convient et pour $n=1$, $P=X$ convient.
   - Passage des rangs $k\leqslant n$ au rang $n+1$. Si on note P_k le polynôme construit pour $k\leqslant n$, on a

     $$z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}=(z+\frac{1}{z})(z^n+\frac{1}{z^n})-(z^{n-1}+\frac{1}{z^{n-1}})=(z+\frac{1}{z})P_n(z+\frac{1}{z})-P_{n-1}(z+\frac{1}{z})$$

     donc $P_{n+1}(X)=XP_n(X)-P_{n-1}(X)$ convient.

– On a ainsi construit P_n pour tout n (avec $\deg P_n = n$).

3. Fixons n et notons P le polynôme obtenu. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = e^{in\theta} + e^{-in\theta}$ donc $P(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)$.
   En posant $x = 2\cos(\theta)$ et donc $\theta = \arccos(\frac{x}{2})$ on obtient la relation Ainsi,
   $$P(x) = 2\cos(n \arccos(\frac{x}{2})) \qquad \forall x \in [-2,2]$$
   Le polynôme dérivée est $P'(x) = \frac{n}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} \sin(n \arccos(\frac{x}{2}))$, il s'annule en changeant de signe en chaque $\alpha_k = 2\cos(\frac{k\pi}{n})$, ainsi $P'(\alpha_k) = 0$ pour $k = 0, \ldots, n$.
   On calcule aussi que $P(\alpha_k) = \pm 2$. Le tableau de signe montre que P est alternativement croissante (de -2 à $+2$) puis décroissante (de $+2$ à -2) sur chaque intervalle $[\alpha_{k+1}, \alpha_k]$, qui forment une partition de $[-2,2]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, P possède n racines simples (une dans chaque intervalle $[\alpha_{k+1}, \alpha_k]$) dans $[-2,2]$. Puisque P est de degré n, on a ainsi obtenu toutes ses racines.

Exercice 83. 1. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Démontrer que si P admet une racine dans $\mathbb{Z}$, alors celle-ci divise a_0.

2. Les polynômes $X^3 - X^2 - 109X - 11$ et $X^{10} + X^5 + 1$ ont-ils des racines dans $\mathbb{Z}$?

Correction 83. 1. Si $k \in \mathbb{Z}$ est racine de P, alors $k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_1k = -a_0$ ce qui donne $k(k^{n-1} + \cdots + a_1) = -a_0$, donc k divise a_0.

2. Si $X^3 - X^2 - 109X - 11$ a une racine $k \in \mathbb{Z}$, nécessairement k divise 11, donc k vaut -1, 1, -11 ou 11. En testant ces quatre valeurs, on trouve que seul 11 est racine.
   De même, si $X^{10} + X^5 + 1$ admettait une racine entière k, celle-ci diviserait 1 donc vaut $k = \pm 1$, or on vérifie que ni $+1$, ni -1 ne sont racines. Ainsi $X^{10} + X^5 + 1$ n'a pas de racine entière.

Exercice 84. Soient $a_0, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $i = 0, \ldots, n$, on pose
$$L_i(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$
(les L_i sont appelés *polynômes interpolateurs de Lagrange*). Calculer $L_i(a_j)$. Soient $b_0, \ldots, b_n$ des réels fixés. Montrer que $P(X) = \sum_{i=0}^n b_i L_i(X)$ est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n qui vérifie :
$$P(a_j) = b_j \quad \text{pour tout } j = 0, \ldots, n.$$
Application. Trouver le polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que
$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4.$$

Correction 84. On a

$$L_i(a_i) = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} = 1 \qquad \text{et} \qquad L_i(a_j) = 0 \text{ si } j \neq i$$

puisque le produit contient un facteur qui est nul : $(a_j - a_j)$. Puisque les L_i sont tous de degré n, le polynôme P est de degré inférieur ou égal à n, et $P(a_j) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(a_j) = b_i$.
Il reste à montrer qu'un tel polynôme est unique. Supposons que Q convienne aussi, alors $P - Q$ est de degré inférieur ou égal à n et s'annule en $n+1$ points (les a_i), donc il est identiquement nul, i.e. $P = Q$.

Pour l'application on utilise utilise les polynômes interpolateurs de Lagrange avec $a_0 = 0$, $b_0 = 1$; $a_1 = 1$, $b_1 = 0$; $a_2 = -1$, $b_2 = -2$; $a_3 = 2$, $b_3 = 4$. On sait qu'un tel polynôme $P(X)$ est unique et s'écrit

$$P(X) = 1 \cdot L_0(X) + 0 \cdot L_1(X) - 2 \cdot L_2(X) + 4L_3(X)$$

où

$$L_0(X) = \frac{(X-1)(X+1)(X-2)}{(0-1)(0+1)(0-2)} = \frac{1}{2}(X^3 - 2X^2 - X + 2)$$

$$L_1(X) = \frac{(X-0)(X+1)(X-2)}{(1-0)(1+1)(1-2)} = \frac{-1}{2}(X^3 - X^2 - 2X)$$

$$L_2(X) = \frac{(X-0)(X-1)(X-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{-1}{6}(X^3 - 3X^2 + 2X)$$

$$L_3(X) = \frac{(X-0)(X-1)(X+1)}{(2-0)(2-1)(2+1)} = \frac{1}{6}(X^3 - X)$$

Ainsi :

$$P(X) = \frac{3}{2}X^3 - 2X^2 - \frac{1}{2}X + 1.$$