Transformation d'Abel

Exercice 1 [01041] [correction]
Soient (a_n) une suite positive décroissante de limite nulle et (S_n) une suite bornée.
a) Montrer que la série $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ est convergente.
b) En déduire que la série $\sum a_n(S_n - S_{n-1})$ est convergente.
c) Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ est convergente.

Exercice 2 [02352] [correction]
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ non multiple de 2π. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } u_n = \frac{\cos(n\theta)}{n}$$

a) Montrer que la suite (S_n) est bornée.
b) En observant que $\cos(n\theta) = S_n - S_{n-1}$, établir que la série de terme général u_n converge.
c) En exploitant l'inégalité $|\cos x| \geqslant \cos^2 x$, établir que la série de terme général $|u_n|$ diverge.

Exercice 3 [01043] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k}$$

a) Montrer que $(\Sigma_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.
b) En déduire que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Exercice 4 [01042] [correction]
Soit z_n le terme général d'une série complexe convergente. Etablir que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{z_n}{n}$ est convergente.

Exercice 5 [03684] [correction]
Soit z_n le terme général d'une série complexe convergente. Etablir

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{z_k}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 6 [03685] [correction]
Soit (a_n) une suite complexe. On suppose que la série $\sum \frac{a_n}{n}$ diverge.
Etablir que pour tout $\alpha \in]-\infty, 1]$, la série $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$ diverge aussi.

Exercice 7 [01028] [correction]
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de réels strictement positifs.
a) On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que la série de terme général $v_n = n(u_n - u_{n+1})$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

b) Réciproquement, on suppose que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ converge. Montrer que la série de terme général $u_n$converge si, et seulement si, la suite (u_n) converge vers 0.
c) Donner un exemple de suite (u_n) qui ne converge pas vers 0, alors que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ converge.

Exercice 8 X MP [03673] [correction]
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de réels de limite nulle.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ ont même nature et que leurs sommes sont égales en cas de convergence.

Exercice 9 CCP MP [02582] [correction]
a) Montrer l'existence, pour $\theta \in]0, \pi[$, d'un majorant M_θ de la valeur absolue de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$$

b) Montrer que $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$.
c) En remarquant de $\cos(n\theta) = S_n - S_{n-1}$, étudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n-1} \cos(n\theta)$$

d) En utilisant $|\cos(k\theta)| \geqslant \cos^2(k\theta)$, étudier la convergence de $\sum |u_n|$.

Exercice 10 [03879] [correction]
On donne une suite réelle (a_n).
On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum |a_{n+1} - a_n|$ convergent. Montrer que la série $\sum a_n^2$ converge.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) $(a_n - a_{n+1})S_n = O(a_n - a_{n+1})$ et la série à termes positifs $\sum a_n - a_{n+1}$ est convergente.
b) En séparant la somme en deux et en décalant les indices

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1})S_k = \sum_{k=0}^{n} a_k S_k - \sum_{k=1}^{n+1} a_k S_{k-1}$$

puis en regroupant

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1})S_k = a_0 S_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k(S_k - S_{k-1}) - a_{n+1}S_n$$

avec $a_{n+1}S_n \to 0$.
Par suite $\sum a_n(S_n - S_{n-1})$ est convergente.
c) On applique le résultat précédent à $a_n = 1/n$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$. (S_n) est bien bornée car

$$S_n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx}\right) = \cos(nx)\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

Exercice 2 : [énoncé]
a) Par sommation géométrique

$$S_n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta} - 1}{\mathrm{e}^{i\theta} - 1}\right)$$

donc

$$|S_n| \leqslant \left|\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta} - 1}{\mathrm{e}^{i\theta} - 1}\right| \leqslant \frac{2}{|\mathrm{e}^{i\theta} - 1|}$$

b) On a

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{S_n}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n(n+1)} - S_0 + \frac{S_N}{N+1}$$

Or

$$\frac{S_N}{N+1} \to 0 \text{ et}$$

$\frac{S_n}{n(n+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n converge.
c) On a

$$|\cos x| \geqslant \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

donc

$$|u_n| \geqslant \frac{\cos(2n\theta)}{2n} + \frac{1}{2n}$$

Si $\theta = 0 \quad [\pi]$ alors $|u_n| \geqslant \frac{1}{n}$ et donc $\sum |u_n|$ diverge.
Si $\theta \neq 0 \quad [\pi]$ alors par ce qui précède la série $\sum \frac{\cos(2n\theta)}{n}$ converge et puisque la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, par opérations, la série de terme général $|u_n|$ diverge.

Exercice 3 : [énoncé]
a) On a

$$\Sigma_n = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik}\right) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{i}\frac{1 - \mathrm{e}^{in}}{1 - \mathrm{e}^{i}}\right)$$

donc

$$|\Sigma_n| \leqslant \left|\mathrm{e}^{i}\frac{1 - \mathrm{e}^{in}}{1 - \mathrm{e}^{i}}\right| \leqslant \frac{2}{|1 - \mathrm{e}^{i}|}$$

et la suite $(\Sigma_n)_{n\geqslant 1}$ est effectivement bornée.
b) On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Sigma_k - \Sigma_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Sigma_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Sigma_k}{k+1}$$

donc

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Sigma_k}{k(k+1)} + \frac{\Sigma_n}{n+1}$$

Or $\frac{\Sigma_n}{n+1} \to 0$ car (Σ_n) est bornée et $\frac{\Sigma_k}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente. On peut donc conclure que (S_n) converge.

Exercice 4 : [énoncé]
Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$$

On a
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{z_n}{n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{S_n-S_{n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{S_n}{n}-\sum_{n=0}^{N-1}\frac{S_n}{n+1}$$
donc
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{z_n}{n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{S_n}{n(n+1)}+\frac{S_N}{N+1}$$
Or $\frac{S_N}{N+1}\to 0$ car (S_N) converge et $\frac{S_n}{n(n+1)}=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente. On peut conclure que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{z_n}{n}$ converge.

Exercice 5 : [énoncé]
Posons
$$R_n=\sum_{k=n}^{+\infty}z_k$$
On a $z_n=R_n-R_{n+1}$ et donc
$$\sum_{k=n}^{N}\frac{z_k}{k}=\sum_{k=n}^{N}\frac{R_k-R_{k+1}}{k}=\sum_{k=n}^{N}\frac{R_k}{k}-\sum_{k=n+1}^{N+1}\frac{R_k}{k-1}$$
puis
$$\sum_{k=n}^{N}\frac{z_k}{k}=\frac{R_n}{n}-\sum_{k=n+1}^{N}\frac{R_k}{k(k-1)}-\frac{R_{N+1}}{N}$$
La suite (R_n) converge vers 0, elle est donc bornée par un certain M ce qui assure l'absolue convergence de la série $\sum\frac{R_k}{k(k-1)}$ et l'on peut donc introduire
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{z_k}{k}=\frac{R_n}{n}-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{R_k}{k(k-1)}$$
Soit $\varepsilon>0$. Il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ tel que
$$\forall n\geqslant N, |R_n|\leqslant\varepsilon$$
et alors pour tout $n\geqslant N$
$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{k(k-1)}\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{M}{k(k-1)}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{\varepsilon}{n}$$
puis
$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{z_k}{k}\right|\leqslant\frac{2\varepsilon}{n}$$

Exercice 6 : [énoncé]
Le cas $\alpha=1$ est entendu. Etudions $\alpha\in\left]-\infty,1\right[$.
Par l'absurde, supposons la convergence de $\sum\frac{a_n}{n^\alpha}$ et introduisons
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^\alpha}$$
de sorte que $S_n-S_{n-1}=a_n/n^\alpha$.
On peut écrire
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k-S_{k-1}}{k^{1-\alpha}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k^{1-\alpha}}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{S_k}{(k+1)^\alpha}$$
puis
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=\sum_{k=1}^{n}S_k\left(\frac{1}{k^{1-\alpha}}-\frac{1}{(k+1)^{1-\alpha}}\right)+\frac{S_n}{(n+1)^{1-\alpha}}$$
La suite (S_n) est bornée car convergente et
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^{1-\alpha}}-\frac{1}{(k+1)^{1-\alpha}}\right)=1-\frac{1}{(n+1)^{1-\alpha}}\to 1$$
il y a donc absolue convergence de la série
$$\sum S_n\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}-\frac{1}{(n+1)^{1-\alpha}}\right)$$
et l'on en déduit la convergence de $\sum\frac{a_n}{n}$.
C'est absurde.

Exercice 7 : [énoncé]
a) On peut écrire
$$\sum_{k=1}^{n}v_k=\sum_{k=1}^{n}ku_k-\sum_{k=2}^{n+1}(k-1)u_k=\sum_{k=1}^{n}u_k-nu_{n+1}(*)$$

Montrons que la convergence de $\sum u_n$ entraîne que $nu_n \to 0$.
Posons S_n les sommes partielles de $\sum u_n$.
Par la décroissance de u_n, on a $0 \leqslant nu_{2n} \leqslant S_{2n} - S_n$.
Par suite $nu_{2n} \to 0$ et aussi $2nu_{2n} \to 0$.
De façon semblable, on obtient $nu_{2n+1} \to 0$ puis $(2n+1)u_{2n+1} \to 0$.
Ainsi $nu_n \to 0$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

b) Supposons que la série de terme général v_n converge.
Si la série de terme général u_n converge alors $u_n \to 0$.
Inversement, supposons que $u_n \to 0$. On peut écrire

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k}$$

On a alors

$$0 \leqslant nu_n \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n}{k} v_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

Puisque la série des v_n converge,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \to 0 \text{ puis } nu_n \to 0$$

La relation (*) entraîne alors la convergence de $\sum u_n$.
c) $u_n = 1$ convient, où si l'on veut une suite non constante, $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

Exercice 8 : [énoncé]
Posons $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - nu_{n+1}$$

Si la série $\sum u_n$ converge alors puisque

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

la série $\sum v_n$ converge car à termes positifs et aux sommes partielles majorées.

Inversement, supposons la convergence de $\sum v_n$.
Puisque la suite (u_n) est de limite nulle, on peut écrire

$$0 \leqslant u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{v_k}{k} \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

et donc $(n+1)u_{n+1} \to 0$. La relation

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} v_k + (n+1)u_{n+1} - u_{n+1}$$

donne alors la convergence de $\sum u_n$ ainsi que l'égalité des sommes des séries.

Exercice 9 : [énoncé]
On a

$$S_n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\frac{\mathrm{e}^{in\theta}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}-1}\right)$$

donc

$$|S_n| \leqslant \frac{2}{|\mathrm{e}^{i\theta}-1|} = M_\theta$$

Posons $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(x-1) - x}{\sqrt{x}(x-1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{(x+1)}{\sqrt{x}(x-1)^2} \leqslant 0$$

donc f est décroissante sur $[2, +\infty[$.
$u_n = f(n)\cos(n\theta) = f(n)\left(S_n - S_{n-1}\right)$ donc

$$\sum_{n=2}^{N} u_n = \sum_{n=2}^{N} f(n)S_n - \sum_{n=1}^{N-1} f(n+1)S_n = \sum_{n=2}^{N} \left(f(n) - f(n+1)\right) S_n + f(N+1)S_N - f(2)S_1$$

Or $f(N+1)S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ car $S_N = O(1)$ et $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.
De plus

$$\left|\left(f(n) - f(n+1)\right) S_n\right| \leqslant M_\theta \left(f(n) - f(n+1)\right)$$

avec $\sum f(n) - f(n+1)$ série convergente (car f converge en $+\infty$) donc par comparaison $\sum \left(f(n) - f(n+1)\right) S_n$ est absolument convergente.
Ainsi par opérations, $\left(\sum_{n=2}^{N} u_n\right)_{N\geqslant 2}$ converge et donc $\sum u_n$ converge.

On a

$$|u_n| = \frac{\sqrt{n}}{n-1}\,|\cos(n\theta)| \geqslant \frac{\sqrt{n}}{n-1}\cos^2(n\theta)$$

Or $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ donc $\cos^2 a \geqslant \frac{1}{2}\cos 2a + 1$ puis

$$|u_n| \geqslant \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n-1}\cos(2n\theta) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n-1}$$

En reprenant l'étude qui précède avec 2θ au lieu de θ, on peut affirmer que

$$\sum \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n-1}\cos(2n\theta)$$

converge tandis que $\sum \frac{\sqrt{n}}{2(n-1)}$ diverge puisque $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
Par comparaison, on peut affirmer que $\sum |u_n|$ diverge.

Exercice 10 : [énoncé]
Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k(S_k - S_{k-1})$$

En séparant la somme en deux et en reprenant l'indexation de la deuxième somme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} S_k$$

ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1})S_k + a_{n+1}S_n$$

La suite (S_n) converge, elle est donc bornée par un certain réel M.
D'une part $a_n \to 0$ et donc $a_{n+1}S_n \to 0$.
D'autre part $|(a_k - a_{k+1})S_k| \leqslant M\,|a_k - a_{k+1}|$ et donc la série $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ converge absolument.
Par addition de convergence, on peut conclure que la série $\sum a_n^2$ converge.