Applications linéaires en dimension finie

Exercice 1. *Applications du thm du rang*
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
1) Montrer que si H est un sev de E, alors $\dim f(H) = \dim H - \dim(H \cap \operatorname{Ker} f)$.
2) Montrer que si K est un sev de F, alors $\dim f^{-1}(K) = \dim(K \cap \operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f)$.

Exercice 2. *Application du thm du rang*
Soient E, F deux ev de dimensions finies et $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$.
Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}(u+v)) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) + \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v)$.
(considérer $w = u_{|\operatorname{Ker}(u+v)}$)

Exercice 3. *Rang de $f \circ g$*
Soit E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Établir :
1) $\dim \operatorname{Ker}(f \circ g) \leqslant \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$.
2) $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) = \operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g \circ f)$.
3) $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim E \leqslant \operatorname{rg}(f \circ g) \leqslant \min(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$.

Exercice 4. *CNS pour que* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *soient supplémentaires*
Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
a: $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$. **b:** $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$. **c:** $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$. **d:** $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{\vec{0}\}$.
e: $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$.

Exercice 5. $fog = 0$
Soit E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0$. Trouver une inégalité liant les rangs de f et de g. Peut-on avoir égalité ?

Exercice 6. *Rang de $f + g$*
Soient E, F deux ev, E de dimension finie, et $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$.
1) Démontrer que $\operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.
2) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\vec{0}_F\}$ et $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E$.

Exercice 7. $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E$
Soient E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E$.
Montrer que les sommes sont directes.

Exercice 8. $f^3 = 0$
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$.
1) Montrer que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} f^2 \leqslant \dim E$.
2) Montrer que $2 \operatorname{rg} f^2 \leqslant \operatorname{rg} f$ (appliquer le théorème du rang à $f_{|\operatorname{Im} f}$).

Exercice 9. $f \circ g = 0$ *et* $f + g \in GL(E)$
Soit E de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $\begin{cases} f \circ g = 0 \\ f + g \in GL(E). \end{cases}$
Montrer que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim E$.

Exercice 10. f *tq* $\operatorname{Im} f$ *et* $\operatorname{Ker} f$ *sont imposés*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et H, K deux sev fixés de E.
1) A quelle condition existe-t-il un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} f = H$ et $\operatorname{Ker} f = K$?
2) On note $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \operatorname{Im} f = H \text{ et } \operatorname{Ker} f = K\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un groupe pour $\circ$ si et seulement si $H \oplus K = E$.

Exercice 11. *Thms de factorisation*
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev avec $\dim(G)$ finie.
1) Soient $u \in \mathcal{L}(F,E)$ et $v \in \mathcal{L}(G,E)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{L}(G,F)$ tel que $v = u \circ h$ si et seulement si $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} u$.
2) Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(E,G)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{L}(G,F)$ tel que $u = h \circ v$ si et seulement si $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} u$.

Exercice 12. *Isomorphisme ∘ projecteur*

Soient E en ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer qu'il existe un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ et un isomorphisme $g \in GL(E)$ tels que $f = g \circ p$.

2) Montrer qu'il existe un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ et un isomorphisme $g \in GL(E)$ tels que $f = p \circ g$.

Exercice 13. *Centre de $\mathcal{L}(E)$*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Le centre de $\mathcal{L}(E)$ est : $Z = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \forall\, g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\vec{x} \in E$. Si $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est libre, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $g(\vec{x}) = \vec{x}$ et $g \circ f(\vec{x}) = -f(\vec{x})$.

2) En déduire que Z est l'ensemble des homothéties.

3) Déterminer $Z' = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \forall\, g \in GL(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.

Exercice 14. *Éléments réguliers dans $\mathcal{L}(E)$*

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1) Montrer que : $(f \text{ est injectif}) \iff (\forall\, g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = 0 \Longrightarrow g = 0)$.

2) Montrer que : $(f \text{ est surjectif}) \iff (\forall\, g \in \mathcal{L}(F),\ g \circ f = 0 \Longrightarrow g = 0)$.

Exercice 15. $f^2 = -\mathrm{id}$

Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\mathrm{id}_E$. Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $\vec{u} \in E$, on pose : $z\vec{u} = x\vec{u} + yf(\vec{u})$.

1) Montrer qu'on définit ainsi une structure de $\mathbb{C}$-ev sur E.

2) En déduire que $\dim_{\mathbb{R}}(E)$ est paire.

Exercice 16. $f \circ f = 0$ *et* $f \circ g + g \circ f = \mathrm{id}$

1) Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $\begin{cases} f^2 = 0 \\ f \circ g + g \circ f = \mathrm{id}_E. \end{cases}$

Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

2) Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$, et F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$. Montrer …

a) $f^2 = 0$.

b) $\forall\, \vec{x} \in E$, il existe $\vec{y}, \vec{z} \in F$ uniques tels que $\vec{x} = \vec{y} + f(\vec{z})$.

c) Il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g + g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Exercice 17. *Endomorphisme nilpotent*

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit *nilpotent* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Dans ce cas, *l'indice* de f est le plus petit entier p tel que $f^p = 0$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

1) Soit $\vec{u} \in E \setminus \operatorname{Ker} f^{p-1}$. Montrer que la famille $\big(\vec{u}, f(\vec{u}), \dots, f^{p-1}(\vec{u})\big)$ est libre.

2) En déduire que si E est de dimension finie n, alors $f^n = 0$.

3) Soit $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f + g \in GL(E)$…

a) en dimension finie.

b) pour E quelconque.

4) Dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$, soient f, g de matrices : $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Vérifier que f est nilpotent, $g \in GL(\mathbb{K}^2)$, mais $f + g \notin GL(\mathbb{K}^2)$.

Exercice 18. *Matexo*

Soit E un K espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall\, x \in E,\ \exists p_x \in \mathbb{N}^*,\ f^{p_x}(x) = \vec{0}$. Montrer que f est nilpotent. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 19. *Mines P' 1995*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente d'indice n.

Soit $\phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ g & \longmapsto & f \circ g - g \circ f. \end{cases}$

1) Montrer que $\phi^p(g) = \sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k f^{p-k} \circ g \circ f^k$. En déduire que ϕ est nilpotente.

2) Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $b \in \mathcal{L}(E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$. En déduire l'indice de nilpotence de ϕ.

Exercice 20. *Endomorphisme cyclique*
Soit E un ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $\vec{u} \in E$ tel que la famille $\left(f^k(\vec{u})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ engendre E.

1) Montrer que $\left(\vec{u}, f(\vec{u}), \dots, f^{n-1}(\vec{u})\right)$ est une base de E. (Considérer p maximal tel que $\mathcal{F} = \left(\vec{u}, \dots, f^{p-1}(\vec{u})\right)$ est libre, et prouver que $f^k(\vec{u})$ est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ pour tout entier k)

2) Montrer qu'un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f si et seulement si c'est un polynôme en f.

Exercice 21. *$u^2 = 0$ en dimension 3*
Soit E un ev de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$. Montrer qu'il existe $f \in E^*$ et $\vec{a} \in E$ tels que : $\forall\, \vec{x} \in E,\ u(\vec{x}\,) = f(\vec{x}\,)\vec{a}$.

Exercice 22. *$(u, x, f(x))$ liée*
Soit E un ev de dimension supérieure ou égale à 3 et $\vec{u} \in E \setminus \{\vec{0}\}$. Trouver tous les endomorphismes $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $\forall\, \vec{x} \in E,$ la famille $(\vec{u}, \vec{x}, f(\vec{x}))$ est liée.

Exercice 23. *Noyaux itérés*
Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $N_k = \mathrm{Ker}(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$.

1) Montrer que la suite (N_k) est croissante (pour l'inclusion) et que la suite (I_k) est décroissante.

2) Soit p tel que $N_p = N_{p+1}$. Justifier l'existence de p et montrer que $N_{p+1} = N_{p+2} = \ldots = N_{p+k} = \ldots$

3) Montrer que les suites (N_k) et (I_k) sont stationnaires à partir du même rang p.

4) Montrer que $N_p \oplus I_p = E$.

5) Montrer que la suite $(\dim(N_{k+1}) - \dim(N_k))$ est décroissante.

Exercice 24. *Dimension des g tq $f \circ g = 0$ et/ou $g \circ f = 0$*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $K = \mathrm{Ker}\, f$, $I = \mathrm{Im}\, f$, $\mathcal{K} = \{g \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } f \circ g = 0\}$ et $\mathcal{I} = \{g \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } g \circ f = 0\}$.

1) Montrer que $\mathcal{K}$ et $\mathcal{I}$ sont des sev de $\mathcal{L}(E)$.

2) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que : $g \in \mathcal{K} \iff \mathrm{Im}\, g \subset K$, et : $g \in \mathcal{I} \iff \mathrm{Ker}\, g \supset I$.

3) a) Montrer que l' application $\Phi : \begin{cases} \mathcal{K} & \longrightarrow \quad \mathcal{L}(E, K) \\ g & \longmapsto \quad g^{|K} \end{cases}$ est un isomorphisme d'ev. En déduire $\dim \mathcal{K}$.

b) Chercher de même $\dim \mathcal{I}$ en introduisant un supplémentaire I' de I.

c) Chercher aussi $\dim(\mathcal{K} \cap \mathcal{I})$.

Exercice 25. *Rang de $f \longmapsto u \circ f \circ v$*
Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer le rang de l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$: $f \longmapsto u \circ f \circ v$.

Exercice 26. *Sous algèbres*
Soit E un ev de dimension finie et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Montrer que si $f \in \mathcal{A}$ et f est bijective, alors $f^{-1} \in \mathcal{A}$.
On pourra étudier l'application $\phi : \begin{cases} \mathcal{A} & \longrightarrow \quad \mathcal{A} \\ g & \longmapsto \quad f \circ g. \end{cases}$

Exercice 27. *Idéaux de $\mathcal{L}(E)$*
Un idéal à gauche de $\mathcal{L}(E)$ est un sev $\mathcal{I}$ de $\mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall\, f \in \mathcal{I},\ \forall\, g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g \in \mathcal{I}$.
Soit $\mathcal{I}$ un idéal à gauche.

1) Montrer que si $f \in \mathcal{I}$ et $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}\, f$, alors $g \in \mathcal{I}$.

2) Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{I}$. Montrer qu'il existe $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\mathrm{Im}(f_1 \circ g_1 + f_2 \circ g_2) = \mathrm{Im}\, f_1 + \mathrm{Im}\, f_2$.

3) Soit $f \in \mathcal{I}$ tel que $\mathrm{rg}(f)$ soit maximal. Montrer que $\mathcal{I} = \{g \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}\, f\} = \{f \circ g \text{ tq } g \in \mathcal{L}(E)\}$.

Exercice 28. *Automorphismes de $\mathcal{L}(E)$*
Soit E un ev de dimension n et $\Phi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ un automorphisme d'algèbre. On note $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base fixée de E, (φ_{ij}) la base de $\mathcal{L}(E)$ associée $\left(\varphi_{ij}(\vec{e}_k) = \delta_{jk}\vec{e}_i\right)$ et $\psi_{ij} = \Phi(\varphi_{ij})$.

1) Simplifier $\psi_{ij} \circ \psi_{k\ell}$.

2) En déduire qu'il existe $\vec{u}_1 \in E \setminus \{\vec{0}\}$ tel que $\psi_{11}(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$.

3) On note $\vec{u}_i = \psi_{i1}(\vec{u}_1)$. Montrer que $\psi_{ij}(\vec{u}_k) = \delta_{jk}\vec{u}_i$ et en déduire que $(\vec{u}_i)$ est une base de E.

4) Soit $f \in GL(E)$ définie par : $f(\vec{e}_i) = \vec{u}_i$. Montrer que : $\forall\, g \in \mathcal{L}(E),\ \Phi(g) = f \circ g \circ f^{-1}$.

Exercice 29. *$f^2 = 0 \Longrightarrow f = g \circ h$ avec $h \circ g = 0$*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $g, h \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f = g \circ h$ et $h \circ g = 0$.

Exercice 30. *Centrale MP 2001*

Soit f un endomorphisme donné de E de dimension n et $F = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g = 0\}$. Trouver la dimension de F.

Exercice 31. *X MP* 2001*

Soit G un sous-groupe fini de $GL(\mathbb{R}^n)$ et $F = \bigcap_{g \in G} \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})$. Montrer que $\mathrm{card}(G) \times \dim F = \sum_{g \in G} \mathrm{tr}(g)$.

Solutions

Exercice 6.

2) $$\mathrm{rg}(f+g)=\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g) \iff \begin{cases}\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Im} g=\{\vec 0_F\}\\ \operatorname{Im}(f+g)=\operatorname{Im} f+\operatorname{Im} g\end{cases} \iff \begin{cases}\operatorname{Im} f\cap\operatorname{Im} g=\{\vec 0_F\}\\ \forall\ \vec x,\vec y,\ \exists\ \vec z \text{ tq } f(\vec x)+g(\vec y)=(f+g)(\vec z).\end{cases}$$

$\Longrightarrow$: Donc $f(\vec x-\vec z)=g(\vec z-\vec y)=\vec 0$. Pour $\vec y=\vec 0$: $\vec x=(\vec x-\vec z)+\vec z\in\operatorname{Ker} f+\operatorname{Ker} g$.
$\Longleftarrow$: Soient $\vec x=\vec x_f+\vec x_g$ et $\vec y=\vec y_f+\vec y_g$: Alors $f(\vec x)+g(\vec y)=f(\vec x_g)+g(\vec y_f)=(f+g)(\vec x_g+\vec y_f)$.

Exercice 9.

$\operatorname{Im} f\subset\operatorname{Ker} g\Longrightarrow \operatorname{rg} f+\operatorname{rg} g\leqslant\dim E$.
$f+g$ est surjective $\Longrightarrow \operatorname{Im} f+\operatorname{Im} g=E\Longrightarrow \operatorname{rg} f+\operatorname{rg} g\geqslant\dim E$.

Exercice 10.

1) $\dim H+\dim K=\dim E$.
2) Si $H\oplus K\neq E$ alors $\mathcal E$ n'est pas stable pour $\circ$.

Exercice 16.

2) c) $g(\vec x)=\vec z$.

Exercice 17.

3) a) $(f+g)(\vec x)=\vec 0\Longrightarrow f^k(\vec x)+g\circ f^{k-1}(\vec x)=\vec 0$.
Pour $k=p$: $f^{k-1}(\vec x)=\vec 0$, puis pour $k=p-1$: $f^{k-2}(\vec x)=\vec 0$, etc, jusqu'à $\vec x=\vec 0$.
b) Même principe sur l'équation : $(f+g)(\vec x)=\vec y$.
On obtient : $(f+g)^{-1}=g^{-1}\circ\big(\mathrm{id}-g^{-1}\circ f+g^{-2}\circ f^2-\ldots+(-1)^{p-1}g^{1-p}\circ f^{p-1}\big)$.

Exercice 22.

$f(\vec x)=\alpha\vec x+\beta(\vec x)\vec u$, $\beta\in E^*$.

Exercice 24.

3) $\dim\mathcal K=(\dim E)(\dim\operatorname{Ker} f)=\dim\mathcal I$, $\quad\dim(\mathcal K\cap\mathcal I)=(\operatorname{rg} f)^2$.

Exercice 25.

$(\operatorname{rg} u)(\operatorname{rg} v)$.

Exercice 28.

1) $\psi_{ij}\circ\psi_{k\ell}=\delta_{jk}\psi_{i\ell}$.
2) ψ_{11} est un projecteur non trivial.
3) Si $\sum\lambda_k\vec u_k=\vec 0$, alors en appliquant ψ_{1j} : $\lambda_j\vec u_1=\vec 0\Longrightarrow\lambda_j=0$.
4) Décomposer g sur la base (φ_{ij}).

Exercice 29.

$g=$ une projection sur $\operatorname{Im} f$ et $h=f$.

Exercice 30.

On veut $\operatorname{Im} g\subset\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} g\supset\operatorname{Im} f$ donc g est entièrement définie par sa restriction à un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$, application linéaire à valeurs dans $\operatorname{Ker} f$. On en déduit $\dim F=(\operatorname{codim}\operatorname{Im} f)(\dim\operatorname{Ker} f)=(\dim\operatorname{Ker} f)^2$.

Exercice 31.

Soit $p=\dfrac{1}{\operatorname{card} G}\sum\limits_{g\in G} g$. Alors $g\circ p=p$, pour tout $g\in G$ donc $p^2=p$, $F\subset\operatorname{Im} p$ et si $x\in\operatorname{Im} p$, on a $p(x)=x$ d'où $g(x)=x$ pour tout $g\in G$ c'est-à-dire $x\in F$. Donc $F=\operatorname{Im} p$ et $\dim F=\mathrm{rg}(p)=\mathrm{tr}(p)$ (trace d'un projecteur).