Applications linéaires

Exercice 1. *Image d'ne somme, d'une intersection*
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de F. Que pouvez-vous-dire de $f(E_1+E_2)$, $f(E_1\cap E_2)$, $f^{-1}(F_1+F_2)$, $f^{-1}(F_1\cap F_2)$?

Exercice 2. *Effet sur les familles libres et génératrices*
Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ linéaire.
1) Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.
2) Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de E transformée par f en une famille génératrice de F.

Exercice 3. $f(\mathrm{Ker}(g\circ f))$
Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f(\mathrm{Ker}(g\circ f)) = \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 4. *Endomorphisme tel que tout vecteur non nul est propre*
Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $\vec{x} \in E$, la famille $\big(\vec{x}, f(\vec{x})\big)$ est liée.
1) Montrer que si $\vec{x} \neq \vec{0}$, il existe un unique scalaire $\lambda_{\vec{x}}$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}}\vec{x}$.
2) Comparer $\lambda_{\vec{x}}$ et $\lambda_{\vec{y}}$ lorsque $(\vec{x}, \vec{y})$ est libre.
3) Montrer que f est une homothétie.

Exercice 5. $f\circ g\circ f = f$ *et* $g\circ f\circ g = g$
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f\circ g\circ f = f$ et $g\circ f\circ g = g$.
1) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$.
2) Montrer que $f(\mathrm{Im}\, g) = \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 6. $f^3 = \mathrm{id}$
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{id}_E$.
1) Montrer que $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(f-\mathrm{id}) = E$.
2) Montrer que $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}) = \mathrm{Im}(f^2+f+\mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}(f-\mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{id})$.

Exercice 7. *Applications* $\mathbb{R}$*-linéaires sur* $\mathbb{C}$
On considère que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
1) Donner une base de $\mathbb{C}$.
2) Montrer que tout endomorphisme de $\mathbb{C}$ peut se mettre sous la forme : $f(z) = az + b\overline{z}$, avec $a, b \in \mathbb{C}$.
3) CNS sur a et b pour que f soit bijectif ?

Exercice 8. *Supplémentaire d'un hyperplan*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire non identiquement nulle. On note $H = \mathrm{Ker}\, f$.
1) Montrer que $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{K}$.
2) Soit $\vec{u} \in E \setminus H$ et $F = \mathrm{vect}(\vec{u})$. Montrer que $F \oplus H = E$.

Exercice 9. *Permutation de coordonnées dans* $\mathbb{K}^n$
Soit $\sigma \in S_n$ (groupe symétrique) et $f_\sigma : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (x_1, \dots x_n) & \longmapsto & (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \end{cases}$
On munit $\mathbb{K}^n$ de la structure d'algèbre pour les opérations composante par composante.
1) Montrer que f_σ est un automorphisme d'algèbre.
2) Soit φ un automorphisme d'algèbre de $\mathbb{K}^n$.
  a) Montrer que la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est invariante par φ (étudier $\varphi(e_i^2)$ et $\varphi((e_i+e_j)^2)$).
  b) En déduire qu'il existe $\sigma \in S_n$ tel que $\varphi = f_\sigma$.
3) Montrer que $\{0\}$, $\mathbb{K}(1, \dots, 1)$, $\{(x_1, \dots, x_n) \text{ tq } x_1 + \dots x_n = 0\}$ et $\mathbb{K}^n$ sont les seuls sev stables par tous les endomorphismes f_σ.

Exercice 10. $\mathcal{L}(E\times F)$*, Chimie P 1996*
Est-il vrai que $\mathcal{L}(E\times F)$ et $\mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(F)$ sont isomorphes ? (E et F espaces vectoriels de dimensions finies).

Exercice 11. *Commutants itérés*
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose pour $v \in \mathcal{L}(E)$: $\varphi(v) = v\circ u - u\circ v$, et on note $\mathcal{C}_i = \mathrm{Ker}\, \varphi^i$ ($\mathcal{C}_0 = \{0\}$, $\mathcal{C}_1$ est le commutant de u, $\mathcal{C}_2$ est l'ensemble des v tels que $v\circ u - u\circ v$ commute avec u,…).
1) Calculer $\varphi(v\circ w)$ en fonction de $v, w, \varphi(v)$ et $\varphi(w)$.
2) Montrer que $\mathcal{C} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_i$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Solutions

Exercice 5.

1) $\vec{u} = (\vec{u} - g \circ f(\vec{u})) + g \circ f(\vec{u})$.

2) $f(\operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} f$.

$f = (f \circ g) \circ f \Longrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im}(f \circ g) = f(\operatorname{Im} g)$.

Exercice 7.

3) $|a| \neq |b|$.

Exercice 10.

Non, ils n'ont pas même dimension si $E \neq \{\vec{0}\}$ ou $F \neq \{\vec{0}\}$.

Exercice 11.

1) $\varphi(v \circ w) = \varphi(v) \circ w + v \circ \varphi(w)$.

2) Par récurrence $\varphi^n(v \circ w) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \varphi^k(v) \circ \varphi^{n-k}(w)$ donc si $v \in \mathcal{C}_p$ et $w \in \mathcal{C}_q$ alors $v \circ w \in \mathcal{C}_{p+q-1}$.