Problème d'analyse

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Dans tout le problème, α désigne un réel strictement supérieur à 1. On pose :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha}$$

L'objectif de ce problème est le calcul de l'intégrale $I(\alpha)$.
On rappelle que pour a et b dans $\mathbb{R}$ on a les formules :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Quelques résultats préliminaires

Pour x dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}^*$ on pose :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos kx$$

Pour $x \in]0,\pi]$ et pour n dans $\mathbb{N}$ on pose :

$$g_n(x) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

1. Établir la formule :
$$\forall x \in]0,\pi] \quad f_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} g_n(x)$$
On pourra, pour ce faire, s'intéresser à la quantité $\sin\left(\frac{x}{2}\right) f_n(x)$.

2. (a) En déduire que g_n est prolongeable en une application continue sur $[0,\pi]$. On note encore g_n l'application ainsi prolongée.

   (b) Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose :
$$u_n = \int_0^{\pi} g_n(x)\,\mathrm{d}x$$
Montrer que la suite (u_n) est constante et préciser sa valeur.

3. Soit $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x \in [0,\pi] \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)-1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   (a) Prouver que g est continue en 0.

   (b) Établir l'existence et déterminer la valeur de :
$$\lim_{x\to 0, x>0} g'(x)$$

   (c) Établir que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ et préciser $g'(0)$.

Étude d'une suite

Pour n dans $\mathbb{N}^*$ on pose :

$$X_n = \int_0^{\pi} f_n(x) \cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) \mathrm{d}x$$

1. Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose :
$$v_n = \int_0^{\pi} g(x) \sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x$$
Montrer qu'il existe A dans $\mathbb{R}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |v_n| \leqslant \frac{A}{2n+1}$$
On pourra, pour ce faire, effectuer une intégration par parties.

2. Établir que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X_n = -\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}v_n + \frac{\pi}{2}$$
Montrer que la suite (X_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X_n = \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\frac{1}{1+\alpha k} + \frac{1}{1-\alpha k}\right)$$

Détermination de la valeur de $I(\alpha)$

On adopte la notation $\beta = \frac{1}{\alpha}$ et pour tout $t \in]0,1]$ on pose :

$$\varphi(t) = \frac{t^{\beta-1}}{1+t} \quad \text{et} \quad \psi(t) = \frac{t^{-\beta}}{1+t}$$

1. (a) Justifier l'existence de $I(\alpha)$.
   (b) Montrer que les applications φ et ψ sont intégrables sur $]0,1]$.
   Dans toute la suite, on pose :

$$J(\beta) = \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K(\beta) = \int_0^1 \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

2. (a) Montrer que :

$$\forall a \in]0,1[\quad \int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha} = \beta \int_{a^\alpha}^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

   On pourra poser $t = x^\alpha$.
   En déduire la formule :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha} = \beta J(\beta)$$

   (b) Montrer que :

$$\forall A \in]1,+\infty[\quad \int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha} = \beta \int_{A^{-\alpha}}^1 \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

   En déduire la formule :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha} = \beta K(\beta)$$

3. Pour n dans $\mathbb{N}$ et t dans $\mathbb{R}$ on pose :

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k$$

   Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et t dans $]0,1]$ on pose :

$$\varphi_n(t) = \sigma_n(t) t^{\beta-1} \quad \text{et} \quad \psi_n(t) = \sigma_{n-1}(t) t^{-\beta}$$

   (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,1] \quad \left|\sigma_n(t) - \frac{1}{1+t}\right| \leqslant t^{n+1}$$

   (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in]0,1] \quad |\varphi_n(t)| \leqslant 2\varphi(t) \quad \text{et} \quad |\psi_n(t)| \leqslant 2\psi(t)$$

   (c) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ φ_n et ψ_n sont intégrables sur $]0,1]$.

4. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$J_n(\beta) = \int_0^1 \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K_n(\beta) = \int_0^1 \psi_n(t)\,\mathrm{d}t$$

   (a) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n(\beta) = J(\beta) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} K_n(\beta) = K(\beta)$$

   (b) Exprimer $J_n(\beta) + K_n(\beta)$ à l'aide de X_n et de α.
   (c) Montrer que :

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$$

Problème d'algèbre

$\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$. On pose :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Étude d'une symétrie

On notera bien, que dans toute cette partie, $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est muni de sa structure de $\mathbb{C}$-algèbre.
Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on pose :

$$\sigma(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau(A) = a + d$$

1. (a) Montrer que σ est une symétrie du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   (b) Établir que (I, J, K, L) est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ puis donner la matrice de l'endomorphisme σ dans cette base.

2. On considère A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

   (a) Montrer que $\sigma(AB) = \sigma(B)\sigma(A)$.

   (b) Justifier l'égalité $A\sigma(A) = \det(A) I$.

   (c) Montrer que si A est inversible alors $\sigma(A)$ l'est aussi. Exprimer les matrices $\sigma(A)^{-1}$ et $\sigma\left(A^{-1}\right)$ en fonction de A.

3. (a) Vérifier que τ est une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

   (b) Soit A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Exprimer $\sigma(A)$ à l'aide des matrices A, I et du complexe $\tau(A)$.

Une $\mathbb{R}$-algèbre célèbre : l'algèbre des Quaternions

On notera bien, que dans toute cette partie, $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est muni de sa structure de $\mathbb{R}$-algèbre. A tout couple (z_1, z_2) de nombres complexes on associe la matrice :

$$M(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z_2} \\ z_2 & \bar{z_1} \end{pmatrix}$$

On désigne par $\mathbb{H}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme $M(z_1, z_2)$, le couple (z_1, z_2) décrivant $\mathbb{C}^2$.

1. (a) Montrer que toute matrice de $\mathbb{H}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont réels.

   (b) En déduire que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Préciser une base et la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$.

   (c) Montrer que $\mathbb{H}$ est stable pour le produit matriciel.

   (d) Montrer que $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre. La $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{H}$ est-elle commutative ?

2. (a) Vérifier que :

$$\forall A \in \mathbb{H} \quad \sigma(A) \in \mathbb{H} \quad \text{et} \quad \det(A) \in \mathbb{R}_+$$

   (b) Montrer qu'une matrice non nulle de $\mathbb{H}$ est inversible et que son inverse est dans $\mathbb{H}$.

   (c) Vérifier que $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe.

3. Montrer que si deux entiers naturels peuvent tous deux s'écrire comme une somme de quatre carrés d'entiers naturels alors il en est de même de leur produit.
   On pourra exprimer $\det(M(z_1, z_2))$ comme une somme de quatre carrés de réels.

Un produit scalaire et une projection orthogonale

Pour A et B dans $\mathbb{H}$, on pose :

$$\langle A|B\rangle = \frac{1}{4}\tau(A\sigma(B) + B\sigma(A))$$

1. On considère A et B dans $\mathbb{H}$.

   (a) Prouver que $\langle A|B\rangle \in \mathbb{R}$.

   (b) Montrer que $\langle A|A\rangle = \det(A)$.

   (c) Établir que $\langle .|.\rangle$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$.

2. Vérifier que I, J, K, L est une base orthonormale de $\mathbb{H}$.

3. On pose $F = \{A \in \mathbb{H} : \tau(A) = 0\}$.

   (a) Montrer que F est un hyperplan du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$. En donner une base.

   (b) Montrer que $F^\perp = \{\alpha I : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

   (c) On désigne par π la projection orthogonale sur F. Montrer que :

$$\forall A \in \mathbb{H} \quad \pi(A) = \frac{1}{2}(A - \sigma(A))$$