Épreuve des petites mines, MPSI, 2004

 source disponible sur `http://francois.fayard.free.fr`

Premier problème

Résolution d'équations differentielles

1. Résoudre l'équation différentielle : $z' + z\tanh t = 0$, où z est une fonction de la variable réelle t à valeurs réelles.
   Trouver la solution z_1 de cette équation telle que $z_1(0) = 1$.
2. Résoudre l'équation différentielle : $z' + z\tanh t = t\tanh t$.
   Trouver la solution z_2 de cette équation telle que $z_2(0) = 0$.

Étude d'un arc paramétré

Dans le plan rapporté au repère orthonormal, on considère la courbe (Γ) représentée paramétriquement par :

$$x(t) = t - \tanh t \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t}$$

1. Démontrer que (Γ) admet un axe de symétrie.
2. Étudier les branches infinies de (Γ).
3. Étudier les variations de x et y; faire un tableau.
4. Préciser la nature du point A d'abscisse 0, ainsi que la tangente en ce point.
5. (a) Calculer $\operatorname{ch} t$ et $\tanh t$ lorsque $\operatorname{sh} t = 1$. Calculer la valeur de t correspondante (on exprimera le résultat sous forme d'un logarithme néperien).
   (b) Déterminer le point B de (Γ) où la tangente a pour coefficient directeur -1; déterminer une équation cartésienne de la tangente en B à (Γ).
6. Donner l'allure de la courbe (Γ).
7. (a) Déterminer une équation cartesienne de la tangente à (Γ) au point M de paramétre t.
   (b) Cette tangente recoupe l'axe des abscisses en un point N. Calculer la distance MN.

Étude d'intégrales et de suites

Soient un réel x et k un entier strictement positif. On pose :

$$I_k(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}^k t}$$

1. Calculer $I_1(x)$. (*On pourra faire la changement de variable* $u = e^t$)
2. Calculer $I_2(x)$.
3. (a) En intégrant par parties, trouver une relation entre I_{k+2} et I_k (*On pourra remarquer que* $1/(\operatorname{ch}^k t) = (\operatorname{ch} t)/(\operatorname{ch}^{k+1} t)$)
   (b) En déduire I_3 et I_4.
4. Démontrer que la fonction $I_k : x \mapsto I_k(x)$ est :
   (a) impaire.
   (b) continue sur $\mathbb{R}$.
   (c) de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
5. Calculer I_k', I_k'' et I_k'''.
6. Donner le développement limité de I_k à l'ordre 3 au voisinage de 0.
7. Démontrer que I_k est monotone sur $\mathbb{R}$.
8. On se propose, pour k fixé, d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
   $$u_n = I_k(n)$$
   (a) Démontrer que cette suite est monotone.
   (b) Démontrer que, pour tout réel t :
   $$\frac{1}{\operatorname{ch} t} \leqslant 2e^{-t}$$
   En déduire que la suite converge.

9. On pose, sous réserve d'existence :

$$J_k = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^k\, t}$$

que l'on note :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^k\, t}$$

   (a) Démontrer l'existence de J_k.

   (b) Calculer J_1 et J_2.

   (c) Calculer J_k.

Deuxième problème

On désigne par E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

où a, b, c sont des nombres réels.

Étude de structures

1. (a) Démontrer que E, muni de l'addition des matrices et de leur produit par un scalaire réel, est un espace vectoriel réel.

   (b) Trouver une base et la dimension de E.

2. (a) Démontrer que E est stable pour la multiplication des matrices.

   (b) En déduire que E, muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau.

   (c) Cet anneau est-il commutatif ?

3. On désigne par G l'ensemble des matrices de E telles que $a > 0$ et $b > 0$. Démontrer que G est un groupe multiplicatif.

Puissances d'une matrice et suites

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in E$$

1. (a) On suppose que $a \neq b$. Démontrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad A^p = \begin{pmatrix} a^p & c\frac{a^p-b^p}{a-b} \\ 0 & b^p \end{pmatrix}$$

   (b) On suppose que $a = b$. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}^*$; on exprimera les coefficients en fonction de a et c.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$B_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} A^p = \begin{pmatrix} \alpha_n & \gamma_n \\ 0 & \beta_n \end{pmatrix}$$

en convenant que :

$$A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et, pour tout réel x :

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

   (a) Rappeler l'inégalité de Taylor-Lagrange avec ses hypothèses.

   (b) Démontrer que, pour x fixé, la suite de terme général $\varphi_n(x)$ converge et que sa limite est e^x.

   (c) On suppose $a \neq b$. Calculer α_n, β_n et γ_n en fonction de $a, b, c, \varphi_n(a)$ et $\varphi_n(b)$. Démontrer que les suites $(\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n)$ ont des limites respectives α, β, γ que l'on calculera.

   (d) On suppose $a = b$. Calculer α_n, β_n et γ_n en fonction de $a, c, \varphi_{n-1}(a)$ et $\varphi_n(a)$. Démontrer que les suites $(\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n)$ ont des limites respectives α, β, γ que l'on calculera.

3. Pour tout

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in E$$

on pose :

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où α, β et γ ont été définis à la question précédente, et on note f l'application de E dans E définie par $f(A) = A'$.

   (a) L'application f est-elle linéaire ?

   (b) L'application f est-elle injective ?

   (c) L'application f est-elle surjective ?

(d) Déterminer l'image de E par f.

4. On suppose maintenant que $0 < a < \ln 2$ et $0 < b < \ln 2$.
On pose, pour $A \in E$:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p} (f(A) - I)^p = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$$

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

(a) Calculer a_n, b_n et c_n lorsque $a \neq b$, puis lorsque $a = b$.

(b) Démontrer que si $0 < x < 1$, la suite de terme général $\psi_n(x)$, x fixé, converge vers $\ln(1 + x)$.

(c) Dans chacun des deux cas précédents, démontrer que les suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) on respectivement pour limites a, b et c.