Coniques

Exercice 1. *Équations du second degré*
Déterminer la nature et les éléments de la courbe d'équation dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ orthonormé :
1) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 35x - 20y = 0$.
2) $5x^2 + 7y^2 + 2xy\sqrt{3} - (10 + 2\sqrt{3}\,)x - (14 + 2\sqrt{3}\,)y - 4 + 2\sqrt{3} = 0$.
3) $x^2 + xy + y^2 = 1$.
4) $x^2 + 2y^2 + 4xy\sqrt{3} + x + y\sqrt{3} + 1 = 0$.
5) $mx^2 + 4mx + (m-1)y^2 + 2 = 0$ $(m \in \mathbb{R})$.

Exercice 2. *Courbe paramétrée*
Montrer que le support de la courbe paramétrée : $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos t + \sin t \end{cases}$ est une ellipse, et en préciser les éléments.

Exercice 3. *Points alignés avec le foyer*
Soit $\mathcal{C}$ une conique de foyer F, directrice D, excentricité e. On considère deux points de $\mathcal{C}$, $M \neq M'$ alignés avec F. Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ en M et M' se coupent sur D ou sont parallèles.

Parabole

Exercice 4. *Orthoptique d'une parabole*
Soit P une parabole de foyer F et de directrice D. Soit $M \in P$, et M' le point de P tel que les tangentes en M et M' sont orthogonales.
1) Montrer que ces tangentes se coupent au milieu de $[H, H']$.
2) Montrer que M, F, M' sont alignés.
En déduire dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ donné, toutes les paraboles tangentes aux axes de coordonnées.

Exercice 5. *Cercle circonscrit*
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, et A, B deux points distincts de $\mathcal{C}$. Soit Δ le diamètre parallèle à (AB).
Pour $M \in \mathcal{C}$, on note P, Q les intersections de (MA) et (MB) avec Δ. Chercher le lieu du centre du cercle circonscrit à MPQ.

Exercice 6. *Projection sur le diamètre d'un cercle*
On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et $A \in \mathcal{C}$. Pour $M \in \mathcal{C}$, on construit le projeté N sur le diamètre perpendiculaire à (OA), et I, le point d'intersection de (OM) et (AN). Quel est le lieu de I ?

Exercice 7. $MF + MH = 2a$
Soit F un point, D une droite ne passant pas par F, et $a > \frac{1}{2}d(F, D)$.
Trouver l'ensemble des points M tels que $MF + d(M, D) = 2a$.

Exercice 8. *Paraboles passant par un point*
Soient D une droite et $F \in D$.
Montrer que pour tout point $M \notin D$, il passe exactement deux paraboles de foyer F et d'axe D.
Montrer que les tangentes à ces paraboles en M sont orthogonales.

Exercice 9. *Longueur minimale d'une corde normale, Ensi Physique 93*
Soit $\mathcal{P}$ une parabole de paramètre p et $A \in \mathcal{P}$. Soit B le point où la normale à $\mathcal{P}$ en A recoupe $\mathcal{P}$. Déterminer la longueur minimale de AB.

Exercice 10. *Cordes perpendiculaires, Centrale P' 1996*

On considère une parabole dans le plan euclidien.

1) Exprimer l'équation d'une droite passant par deux points A et B de la parabole à l'aide d'un déterminant d'ordre 3.

2) A, B, C étant trois points sur la parabole, exprimer le fait que (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

3) On fixe A sur la parabole, B et C sont deux points de la parabole variables tels que (AB) et (AC) sont perpendiculaires. Montrer que (BC) passe par un point fixe M.

4) Quel est le lieu de M quand A varie ?

Exercice 11. *Normales concourantes, Centrale P' 1996*

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ et $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{P}$.

1) Discuter l'existence et le nombre de points $M \in \mathcal{P}$ distincts de M_0 tels que la normale à $\mathcal{P}$ en M passe par M_0.

2) Dans le cas où il y a deux solutions, M_1 et M_2, trouver le lieu géométrique du centre de gravité du triangle $M_0M_1M_2$.

Exercice 12. *Croisillons sur une parabole, Centrale MP 2000*

Pour $p > 0$ on donne la courbe Γ d'équation $y^2 = 2px$. Soit un carré $ABCD$ tel que $B, D \in \Gamma$ et A, C appartiennent à l'axe de symétrie de Γ.

1) Quelle relation lie les abscisses de A et C ?

2) On construit une suite (M_n) de points de Ox, M_n d'abscisse x_n, telle que $x_{n+1} > x_n$ et M_nM_{n+1} est la diagonale d'un carré dont les deux autres sommets appartiennent à Γ. Déterminer un équivalent de x_n quand $n \to \infty$.

Ellipse

Exercice 13. *Orthoptique d'une ellipse*

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyers F, F', de centre O, de dimensions a et b.

Soient $M, M' \in \mathcal{E}$ tels que les tangentes à $\mathcal{E}$ sont perpendiculaires en un point T.

Montrer que $TF^2 + TF'^2 = 4a^2$. Quel est le lieu de T quand M et M' varient ?

Exercice 14. *Tangentes à une ellipse*

Soient $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{4a^2} + \dfrac{y^2}{4b^2} = 1$, et $\mathcal{E}' : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1) CNS sur u, v, w pour que la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ soit tangente à $\mathcal{E}'$?

2) Soient (MP), (MQ) deux tangentes à $\mathcal{E}'$ avec $M, P, Q \in \mathcal{E}$. Montrer que (PQ) est aussi tangente à $\mathcal{E}$.

Exercice 15. *Points mobiles avec PQ = constante*

Soient P un point mobile sur Ox, et Q un point mobile sur Oy tels que PQ reste constante.

1) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer le lieu, $\mathcal{C}_\alpha$, de $\mathrm{Bar}(P : 1 - \alpha, Q : \alpha)$.

2) Soit R le quatrième point du rectangle $OPQR$. Démontrer que la tangente à $\mathcal{C}_\alpha$ en un point M est perpendiculaire à (RM).

Exercice 16. *FMT est rectangle en F*

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F, directrice D. Soit $M \in \mathcal{E}$ hors de l'axe focal, et T le point d'intersection de la tangente en M et de la directrice D. Montrer que FMT est rectangle en F.

Exercice 17. $MF \cdot MF' + OM^2$

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyers F, F' et de centre O.

Montrer que $M \in \mathcal{E} \iff MF \cdot MF' + OM^2 = 2a^2 - c^2$.

Exercice 18. $1/OM^2 + 1/OP^2$

Soit $\mathcal{E}$ un ellipse de centre O et de dimensions a, b. Soient $M, P \in \mathcal{E}$ tels que OMP soit rectangle en O.

1) Montrer que $\dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{OP^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.

2) En déduire que (MP) reste tangente à un cercle fixe de centre O.

Exercice 19. *Cercle sur une tangente*

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de sommets A, A', et $M \in \mathcal{E}$. La tangente en M coupe les tangentes en A, A' en P, P'. Montrer que le cercle de diamètre $[P, P']$ passe par les foyers de $\mathcal{E}$.

Hyperbole

Exercice 20. *Projection non orthogonale*

Soient F un point, D une droite ne passant pas par F, et $\vec{\Delta}$ une direction ni égale ni perpendiculaire à $\vec{D}$. Pour $M \in \mathcal{P}$, on note H le projeté de M sur D parallèlement à $\vec{\Delta}$. Quel est l'ensemble des points M tels que $MF = MH$?

Exercice 21. *Triangle rectangle sur une hyperbole*

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole équilatère de dimension a. On se place dans un ROND $(O, \vec{i}, \vec{j})$ construit sur les asymptotes de $\mathcal{H}$.

1) Déterminer l'équation de $\mathcal{H}$ dans ce repère.

2) Soit ABC un triangle rectangle en A dont les trois sommets sont sur $\mathcal{H}$. Montrer que la tangente en A est orthogonale à (BC).

3) Soit ABC un triangle quelconque dont les sommets sont sur $\mathcal{H}$. Montrer que l'orthocentre y est aussi.

Exercice 22. *Cercle sur une tangente*

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de sommets A, A', et $M \in \mathcal{H}$. La tangente en M coupe les tangentes en A, A' en P, P'. Montrer que le cercle de diamètre $[P, P']$ passe par les foyers de $\mathcal{H}$.

Exercice 23. *Triangle équilatéral*

Soient A, F deux points distincts, D leur médiatrice, $\mathcal{H}$ l'hyperbole de foyer F, directrice D, excentricité 2, et $\mathcal{C}$ un cercle passant par A et F, de centre I.

1) Pour $M \in \mathcal{C}$, montrer que $M \in \mathcal{H} \iff 3\overline{(\overrightarrow{IM}, D)} \equiv \overline{(\overrightarrow{IF}, D)}\ [2\pi]$.

2) En déduire que si $I \notin (AF)$, $\mathcal{C}$ coupe $\mathcal{H}$ aux sommets d'un triangle équilatéral.

Exercice 24. $\overline{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})} \equiv 2\overline{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO})}$

Soient O, A deux points distincts du plan. Trouver les points M tels que $\overline{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})} \equiv 2\overline{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO})}$.

Exercice 25. *Lieu géométrique*

Soient A, A' deux points distincts et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[A, A']$. Pour $P \in \mathcal{C}$, on construit : P' le symétrique de P par rapport à (AA'), et M le point d'intersection de (AP) et (A', P'). Quel est le lieu de M ?

Exercice 26. *Triangle sur une hyperbole, Ensi P 91*

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole équilatère et ABC un triangle dont les sommets appartiennent à $\mathcal{H}$. Montrer que l'orthocentre, H, du triangle appartient aussi à $\mathcal{H}$. Comparer H et le point Q où le cercle circonscrit à ABC recoupe $\mathcal{H}$.

Solutions

Exercice 1.

1) Parabole. axes $= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$, $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. sommet : $X = -\frac{4}{5}$, $Y = -\frac{16}{5}$.

2) Ellipse. $\Omega = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, axes à $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$, $a = 2$, $b = \sqrt{2}$.

3) Ellipse. $\Omega = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, axes à $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

5) Centre $\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} \quad m < 0 \implies \text{ellipse horizontale.} \\ 0 < m < 1/2 \implies \text{hyperbole verticale.} \\ 1/2 < m < 1 \implies \text{hyperbole horizontale.} \\ 1 < m \implies \text{ellipse verticale.} \end{cases}$$

Exercice 2.

axes d'angle $-\frac{1}{2}\arctan 2\ [\pi/2]$, excentricité $= \sqrt{\dfrac{3\sqrt{5}-5}{2}}$.

Exercice 3.

$\mathcal{C} : x^2(1-e^2) + y^2 + 2e^2dx - e^2d^2 = 0$
$T_u, v : x(u(1-e^2) + e^2d) + vy = e^2d(d-u)$
$uv' - u'v = 0 \implies x = d$.

Exercice 4.

1) Soit O ce milieu. La tangente en M est parallèle à (FH'), et passe par le milieu de $[F,H]$, donc par le milieu de $[H,H']$.

2) Calcul d'angles. $\overline{(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MF})} \equiv \overline{(\overrightarrow{FH'}, \overrightarrow{FM'})}$.

Exercice 5.

Soit O' ce centre. Les triangles MPQ et MAB sont semblables, donc O' est l'image de O par l'homothétie de centre M qui transforme A en P.
Soit $(A'B')$ la symétrique de (AB) par rapport à O. D'après l'homothétie,

$$\frac{O'M}{d(O',\Delta)} = \frac{OM}{d(O,(AB))} = (cste) = \frac{OM - O'M}{d(O,(AB)) - d(O',\Delta)} = \frac{OO'}{d(O',(A'B'))}.$$

Donc O' décrit une partie d'une conique de foyer O et de directrice $(A'B')$.

Exercice 6.

Repère $(O, \frac{\overrightarrow{OA}}{R}, \vec{\jmath}) \implies$ parabole $\rho = \dfrac{R}{1+\sin\theta}$.

Exercice 7.

arcs de paraboles de foyer F et de directrices Δ, Δ', parallèles à D à la distance $2a$ de D.

Exercice 9.

$A : (t^2/2p, t)$, $B : (u^2/2p, u)$ avec $t(t+u) = -2p^2$. AB est minimal pour $t^2 = 2p^2$ et vaut alors $3p\sqrt{3}$.

Exercice 10.

1) Parabole : $y^2 = 2px \implies x = 2pt^2, y = 2pt$. Corde : $\begin{vmatrix} 2pa^2 & 2pb^2 & x \\ 2pa & 2pb & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

2) $a^2 + ab + ac + bc + 1 = 0$.

3) $c = -\dfrac{a^2+ab+1}{a+b}$.
$(BC) : (2pa+y)b^2 + (2pa^2 + 2p - x)b - (ax + a^2y + y) = 0$.
Point fixe : $y = -2pa$, $x = 2p(a^2+1)$.

4) Parabole translatée de $\mathcal{P}$ de $(2p, 0)$.

Exercice 11.

1) $M = (2pt^2, 2pt) \Longrightarrow 2t^2 + 2tt_0 + 1 = 0$. Il y a deux solutions si $|t_0| > \sqrt{2}$, une seule si $|t_0| = \sqrt{2}$ et aucune si $|t_0| < \sqrt{2}$.

2) $t_1 + t_2 = -t_0$, $t_1^2 + t_2^2 = t_0^2 - 1$. Centre : $(4pt_0^2 - 2p, 0)$ (1/2-droite).

Exercice 12.

1) $x_C - x_A = 2p \pm \sqrt{4p^2 + 8pxA}$.

2) $x_{n+1} = x_n + \sqrt{8px_n + 4p^2} + 2p = x_n\Big(1 + \sqrt{\dfrac{8p}{x_n}} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x_n}}\Big)\Big)$ donc $\sqrt{x_{n+1}} = \sqrt{x_n} + \sqrt{2p} + \mathrm{o}(1)$ et $x_n \sim 2pn^2$.

Exercice 13.

Soient P, P' les symétriques de F par rapport aux tangentes. Donc $F'P = F'P' = 2a$.
Le triangle FPP' est rectangle, donc T est le milieu de $[P, P']$, et $TF = TP = TP'$.
Donc, $TF^2 + TF'^2 = F'P^2 = 4a^2$.
$TF^2 + TF'^2 = 2TO^2 + OF^2 + OF'^2$ donc T appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Exercice 14.

1) $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$.

2) $M : \begin{pmatrix} 2a\cos\theta \\ 2a\sin\theta \end{pmatrix}$, $P : \begin{pmatrix} 2a\cos\alpha \\ 2a\sin\alpha \end{pmatrix}$: (MP) est tangente à $\mathcal{E}' \Longleftrightarrow \theta \equiv \alpha \pm \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$.

Exercice 15.

1) $\dfrac{x^2}{(1-\alpha)^2} + \dfrac{y^2}{\alpha^2} = d^2$.

Exercice 16.

$M : \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Longrightarrow T : \begin{pmatrix} a/e \\ b^2(e - X)/d \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FT} = 0$.

Exercice 20.

Hyperbole d'excentricité $\frac{1}{\cos\alpha}$, avec $\overline{(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{\Delta})} \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Exercice 21.

1) $xy = \frac{a^2}{2}$.

2) calcul.

3) calcul.

Exercice 23.

1) $MH = \frac{1}{2}MF \Longrightarrow IMH$, IMN, et INF sont semblables.

Exercice 24.

Soit $\alpha \equiv \overline{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO})}$.
$\dfrac{OM}{\sin\alpha} = \dfrac{AM}{\sin(2\alpha)} \Longrightarrow 2\cos\alpha = \dfrac{AM}{OM}$.
Al-Khâshi $\Longrightarrow \dfrac{AM^2}{OM}(OM - OA) = (OM - OA)(OM + OA)$.
$OM = OA \Longrightarrow \alpha \equiv \frac{\pi}{4}$.
$OM \neq OA \Longrightarrow OM = 2d(M, \Delta)$ où Δ est la médiatrice de $[O, A]$, et M est du côté de O.

Exercice 25.

$M : \begin{pmatrix} 1/\cos\theta \\ -\tan\theta \end{pmatrix} \Longrightarrow$ hyperbole.

Exercice 26.

On se ramène à une hyperbole d'équation $xy = 1$. Soient $A = \Big(a, \frac{1}{a}\Big)$, $B = \Big(b, \frac{1}{b}\Big)$, $C = \Big(c, \frac{1}{c}\Big)$. Alors $H = \Big(-\frac{1}{abc}, -abc\Big) \in \mathcal{H}$.
L'équation du cercle circonscrit à ABC est : $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ et les points communs au cercle et à $\mathcal{H}$ vérifient donc : $x^4 + \alpha x^3 + \gamma x^2 + \beta x + 1 = 0$. On connaît 3 racines : $x = a, b, c$ donc la quatrième est $q = \dfrac{1}{abc}$ ce qui prouve que Q et H sont symétriques par rapport à O.