COURBES PARAMETREES

Exercice 1

Etudier et tracer la courbe paramétrée définie par

$$f(t) = \left(x(t) = \frac{t-1}{t}, y(t) = \frac{t^2}{t+1} \right).$$

Montrer que cette courbe admet une équation cartésienne, de la forme $y = f(x)$.

Exercice 2

Etdudier et tracer la courbe paramétrée définie par

$$f(t) = \left(x(t) = 2t + \frac{1}{2t+1}, y(t) = t^2 - \frac{1}{2t+1} \right).$$

Exercice 3

On considère la courbe Γ définie par

$$f(t) = \left(x(t) = \cos^3 t, y(t) = \sin^3 t \right).$$

1) Etudier et tracer Γ.
2) Pour tout point $M(t)$ de Γ non situé sur un des axes de coordonnées, on considère $P(t)$ et $Q(t)$, points d'intersection de la tangente à Γ en $M(t)$, avec Ox et Oy respectivement. Montrer que $||\overrightarrow{P(t)\,Q(t)}||$ est une constante que l'on déterminera.

Exercice 4

Une courbe paramétrée (I, f) possède un point double s'il existe $(t_1, t_2) \in I^2$, $t_1 \neq t_2$, tels que $M(t_1) = M(t_2)$.
Montrer que la courbe paramétrée définie par

$$f(t) = \left(x(t) = 3t^3 + 2t^2 - t - 1, y(t) = 3t^2 + 2t + 1 \right)$$

admet un point double. Déterminer les deux tangentes correspondantes.

Exercice 5

Etudier et tracer la courbe d'équation polaire

$$r = \cos(\theta) - \cos(2\theta).$$

Exercice 6

Etudier et tracer la courbe d'équation polaire

$$r = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}.$$

Exercice 7

Etudier et tracer la courbe d'équation polaire

$$r = \frac{\sin\theta}{1 - 2\cos\theta}.$$

Exercice 8

On considère les points $F(1,0)$ et $F'(-1,0)$. Déterminer une équation polaire de l'ensemble C des points M tels que $MF.MF' = 1$. Etudier et tracer cette courbe.

Exercice 9

On considère la courbe Γ définie par la représentation paramétrique :

$$x(t) = \frac{t^2+1}{2t}\ ,\ y(t) = \frac{2t-1}{t^2}$$

dans le repère orthonormé $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
1) Etudier les variations de x et y et préciser les résultats dansun tableau. Donner les limites en l'infine et en 0.
2) Déterminer l'équation de la tangente (T) à Γ pour $t = 1$. Etudier le signe de $y(t) + 2x(t) - 3$ au voisinage de 1. Quel résultat obtient on par cette étude ?
3) Montrer que $(y(t) + 4x^2(t) - 4x(t) - 2 = t^2 - 2t$. En déduire que la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -4x^2 + 4x + 2$ est asymptote à Γ quand t tend vers 0 (c'est à dire que la distance de Γ à $\mathcal{P}$ tend vers 0 quand t tend vers 0). Etudier les positions respectives de $\mathcal{P}$ et de Γ au voisinage de $t = 0$.
4) Tracer (T), $\mathcal{P}$ et Γ dans le repère R.

Exercice 10

On considère la cardioïde Γ d'équation polaire $r(\theta) = 1 + \cos\theta$.
1) En dérivant la relation $\overrightarrow{OM}(\theta) = r(\theta)\overrightarrow{u}(\theta)$ déterminer les coordonnées du vecteur $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}(\theta)$ dans la base $(\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$.

2) Montrer que $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}(\theta) = 2\cos\dfrac{\theta}{2}\,\overrightarrow{u}(\dfrac{3\theta}{2}+\dfrac{\pi}{2})$.

3) Soit $\overrightarrow{b}$ un vecteur non nul. Montrer qu'il existe trois points de la cardioïde, M_1, M_2, M_3, pour lesquels les tangentes admettent $\overrightarrow{b}$ comme vecteur directeur. On pourra poser $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{b}})$ et déterminer $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ en fonction de α.

4) Vérifier que $e^{ia} + e^{i(a+\frac{2\pi}{3})} + e^{i(a+\frac{4\pi}{3})} = 0,\ a \in \mathbb{R}$. On appelle $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ les angles polaires des trois points déterminés dans la question précédente. Vérifier que :

$$\sum_{k=1}^{3} \cos\theta_i = \sum_{k=1}^{3} \cos 2\theta_i = 0,\ \sum_{k=1}^{3} \sin\theta_i = \sum_{k=1}^{3} \sin 2\theta_i = 0.$$

5) Déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$.

6) Montrer que les milieux des cotés du triangle $M_1M_2M_3$ décrivent une cardioïde obtenue par homothétie à partir de Γ.