1 Calcul d'intégrales doubles et triples

Exercice 1 *Calculer les intégrales doubles suivantes :*
$\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \; x^2\cos y \; dxdy$, $\int_0^1\int_0^y \; x^2 y \; dxdy$, $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \; xy \; dxdy$,
$\int\int_D \; e^{-(x+y)} \; dxdy$ *où* $D = \{(x,y);\; x \geq 0,\; y \geq 0\}$,
$\int\int_D \; xy \; dxdy$ *où* $D = \{(x,y);\; x \geq 0,\; y \geq 0,\; x^2 + y^2/4 \leq 1\}$,
$\int\int_D \; \sqrt{x^2+y^2} \; dxdy$ *où* $D = \{(x,y);\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$,
$\int\int_D \; x \; dxdy$ *où* $D = \{(x,y);\; x \geq 1,\; (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$,
$\int\int_D \; (x^2 + y^2 - 2y) \; dxdy$ *où* D *est le cercle de centre* $(1,1)$ *et de rayon* 1.

Exercice 2 *Pour* $1 > \epsilon > 0$, *soit* $D_\epsilon = \{(x,y);\; \epsilon \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ *et soit* α *un réel. Calculer* $I_\epsilon = \int\int_{D_\epsilon} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \; dxdy$. *Pour quelles valeurs de* α *la limite de* I_ϵ *lorsque* ϵ *tend vers zero est-elle finie ?*

Exercice 3 *Calculer les intégrales triples suivantes :*
$\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^1 \; x^2\cos y \; z \; dxdydz$, $\int\int\int_D \; e^{-(x+y+z)} \; dxdydz$ *où* $D = \{(x,y,z);\; x \geq 0,\; y \geq 0,\; z \geq 0\}$,
$\int\int\int_D \; z \; dxdydz$ *où* $D = \{(x,y,z);\; 0 \leq z \leq 1,\; x^2 + y^2 \leq 1\}$,
$\int\int\int_D \; \sqrt{x^2+y^2+z^2} \; dxdydz$ *où* $D = \{(x,y,z);\; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

2 Intégrales multiples et géométrie

Exercice 4 *Trouver sous forme d'une intégrale l'expression de la circonférence de l'ellipse d'équation* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$ *en utilisant le paramétrage* $\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & a\cos u \\ y & = & b\sin u \end{array} \right\}$ *avec* $u \in [0, 2\pi[$. *Qu'obtient-on pour* $a = b$ *?*

Exercice 5 *On considère l'hélice circulaire de pas* $P > 0$ *et de rayon* $R > 0$ *paramétrée par* $u \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & R\cos u \\ y & = & R\sin u \\ z & = & P\,u \end{array} \right\} = M(u).$$

- *Cette courbe passe-t-elle par le point* $(0,0,0)$ *? Par le point* $\left(0, R, \dfrac{P\,\pi}{2}\right)$ *?*
- *Ecrire l'équation de la tangente à cette courbe au point* $M(u)$ *pour* $u = \dfrac{\pi}{2}$.
- *Calculer la longueur d'une* **spire** $(0 \leq u \leq 2\pi)$.

Exercice 6 *On considère l'hyperboloïde* $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & u\cos v - \sin v \\ y & = & u\sin v + \cos v \\ z & = & u \end{array} \right\}$ $u, v \in \mathbb{R}$.

- *Calculer l'élément d'aire* $d\sigma$ *de cet l'hyperboloïde.*
- *Montrer que l'aire de la surface* $\mathcal{S} = \{M(u,v) \ / \ 0 \leq u \leq 1 \, , \, 0 \leq v \leq 2\pi)\}$ *est donnée par la formule* $\mathcal{A} = 2\pi \int_0^1 \sqrt{2u^2+1}\, du$.
- *En faisant un changement de variable, calculer* $\mathcal{A}$.

Exercice 7 *Calculer la surface d'un "ballon de rugby" obtenue par rotation (d'angle v) autour de l'axe* (Oz) *de l'ellipse du plan* (yOz) *paramétrée par* $\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \cos u \\ z & = & 2\sin u \end{array} \right\}$.

Exercice 8 *Calculer l'intégrale curviligne* $\displaystyle\int_C \frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{x^2+y^2}$ *lorsque*

- C *est le carré* $\max\{|x|, |y|\} = 1$.
- C *est le cercle unité de centre* O*, parcouru dans le sens trigonométrique.*

Exercice 9 *Dans le repère orthonormé direct* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ *on considère le vecteur* $\vec{v} = a\vec{k}$ *et la surface* $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \ / \ z = f(x,y)\}$*, où* f *est une fonction donnée régulière d'un domaine* $\mathcal{D}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *et à valeur dans* $\mathbb{R}$*. On oriente* $\mathcal{S}$ *de telle sorte que l'angle* $(\vec{n}, \vec{k})$ *soit aigu (*$\vec{n}$ *est le vecteur normal à la surface). Calculer le* **flux** *de* $\vec{v}$ *à travers* $\mathcal{S}$.

Exercice 10 *Tracer la boucle* $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{3u}{1+u^3} \\ y & = & \dfrac{3u^2}{1+u^3} \end{array} \right\}$ *pour* $u \in [0, +\infty[$ *et donner l'expression de son aire au moyen d'une integrale simple. Calculer l'aire de cette boucle.*

Exercice 11 *On cherche à calculer l'intégrale*

$$I = \int\int_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2)\, dx\, dy, \quad \text{où } \mathcal{D} = \{(x,y) \ / \ x \geq 0 \, , \, y \geq 0 \, , \, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Calculer I *en utilisant la formule de Riemann-Green et donner une explication aux vues du résultat.*

Exercice 12 *On considère la sphère* Σ *de centre* O *et de rayon* $R = 1$ *et le vecteur* $\vec{v}$ *de composante* (x^3, y^3, z^3) *en chaque point* (x,y,z) *de l'espace* $\mathbb{R}^3$*. En utilisant la formule d'Ostrogradski, calculer le flux de* $\vec{v}$ *à travers la sphère* Σ.

Exercice 13 *Soit* A *un point fixé de l'espace* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathcal{S}$ *la surface de la sphère* $\|\overrightarrow{OM}\| = R$ *(*R *donné, strictement positif). Calculer le* **potentiel** $\displaystyle\int\int_{\mathcal{S}} \frac{d\sigma}{\|\overrightarrow{AM}\|}$.