Espaces vectoriels Applications linéaires en dimension finie

Exercice 1 E$=\mathbb{R}^4$.Trouver le rang de la famille de vecteurs :
$u_1 = (3,2,1,0), u_2 = (2,3,4,5), u_3 = (0,1,2,3), u_4 = (1,2,1,2), u_5 = (0,-1,2,1)$

Exercice 2 $E = \mathbb{R}^2$. Déterminer un supplémentaire de $Vect((1,2))$.

Exercice 3 $E = \mathbb{R}^2$. Déterminer un supplémentaire de la droite d'équation $2x + 3y = 0$.

Exercice 4 $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer un supplémentaire de $Vect((1,2,-1))$.

Exercice 5 $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer un supplémentaire de la droite d'équation $x + 2y + z = 0$ et $-x + y + z = 0$

Exercice 6 $E = \mathbb{R}^3.P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad x + y + z = 0\}$ et $D = Vect(1,2,1)$. Montrer que le plan P et la droite D sont supplémentaires. Soit p la projection sur P parallèlement à D. Soit s la symétrie par rapport à P parallèlement à D. Soit $(x,y,z) \in E$, déterminer $p(x,y,z)$ et $s(x,y,z)$.

Exercice 7 Déterminer dans chacun des cas une base du noyau et de l'image de l'application linéaire définie de la manière suivante:
1) $f(x,y,z) = (-x + 2y, 2x - 3y + z)$
2) $f(x,y,z) = (2x - y, x + y, x - 2y)$

Exercice 8 Soient E, F, G trois Kev.Montrer que
1) $\forall (f,g) \in \mathcal{L}(E,F) \ \ |rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$
2) $\forall f \in \mathcal{L}(E,F), \forall g \in \mathcal{L}(F,G) \ rg(f) + rg(g) - dim(F) \leq rg(gof) \leq inf(rg(f), rg(g)$.

Exercice 9 1) Si dim$E$=1 déterminer $\mathcal{L}(E)$
2) Soit E un Kev de dimension supérieure ou égale à 2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que si f commute avec tous les automorphismes alors f est une homothétie

Exercice 10 Soit E un K e.v.de dimension n. Un endomorphisme u est dit nilpotent si $\exists k \in \mathbb{N} \ u^k = 0$
1) Montrer que si u est un endomorphisme nilpotent et si p est le plus petit entier tel que $u^p = 0$, alors il existe un vecteur x_0 de E tel que $(x_0, u(x_0), .., u^{p-1}(x_0))$ soit une famille libre. Montrer que $p \leq n$.
2) Montrer que si u et v sont deux endomorphismes nilpotents qui commutent alors $u + v$ est nilpotent.

Exercice 11 Soient E, E', F, F' des Kespaces vectoriels, ϕ un isomorphisme de E sur E' et ψ un isomorphisme de F sur F', soit $L : f \in \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \psi o f o \phi^{-1} \in \mathcal{L}(E', F')$.
Montrer que L est un isomorphisme.

Exercice 12 Soit E un Kespace vectoriel de dimension n. On dit qu'un endomorphisme u est cyclique s'il existe un vecteur x de E tel que $(x, u(x), ...u^{n-1}(x))$ forme une base de E
1) Montrer que si u est cyclique les endomorphismes qui commutent avec u sont les polynomes en u.
2) On suppose $n = 2$. Montrer tout endomorphisme u de E est une homothétie ou est cyclique.

Exercice 13 Soit E un K ev.Soient $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$.Montrer que si $E = Im(f) + Ker(g)$ et $E = Im(g) + Ker(f)$ alors les sommes sont directes.

Exercice 14 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur a de $\mathbb{R}^3$ et une forme linéaire l tels que $\forall x \in \mathbb{R}^3$ $f(x) = l(x)a$.

Soit E un Kev de dimension finie, soient F et G deux sous espaces vectoriels de même dimension. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun.

Exercice 15 Soit E un $\mathbb{R}$ ev de dimension finie. Que peut-on dire d'une famille $(F_i)_{1 \leq i \leq p}$ de sous espaces vectoriels tels que $\cup_{i=1}^{p} F_i = E$.

Exercice 16 Soit E un K e.v. de dimension finie .Soient F' et G' deux sous espaces de$\mathcal{L}(E)$ tels que $F' + G' = \mathcal{L}(E)$ et $\forall f \in F', \forall g \in G' \quad fog + gof = 0$.Montrer que $F' = \{0\}$ ou $G' = \{0\}$.