ARITHMETIQUE

Exercice 1

Resoudre dans $\mathbb{Z}$: $3x^2 + xy - 11 = 0$

Exercice 2

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad 11 \,|2^{6n+3} + 3^{2n+1}$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $323x - 391y = 612$

Exercice 4

Trouver les entiers naturel n tels que le reste de la division de 9733 par n soit 73 et celui de la division de 6425 par n soit 100

Exercice 5

Petit théorème de Fermat : soit p un nombre premier
1) Montrer que p divise C_p^k avec $0 < k < n$
2) Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2$ $(a + b)^p \equiv a^p + b^p$ modulo p
3) Montrer que $\forall (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n \quad (a_1 + ... + a_n)^p \equiv a_1^p + ... + a_n^p \quad$ modulo p
4) en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ $n^p \equiv n$ modulo p

Exercice 6

Soient a et b des entiers non nuls premiers entre eux. Déterminer $a \wedge b$ et $a \vee b$.

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que si $2^n - 1$ est premier alors n est premier. Donner un exemple où $2^n - 1$ n'est pas premier bien que n soit premier.

Exercice 8

Déterminer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ $(5n - 9) \wedge (2n - 6)$.

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$.
1) Calculer le nombre de diviseurs positifs de n.
2) Calculer la somme $S(n)$ des diviseurs positifs de n.

Exercice 10

Soient p et q des nombres premiers distincts, α et β des entiers naturels non nuls.
1) Exprimer le produit des diviseurs de $n = p^\alpha q^\beta$ à l'aide de n et du nombre de ses diviseurs.
2) Pour quel(s) nombre(s) n le produit des diviseurs est-il 20^{42} ?

Exercice 11

Soient $n \geq 2$ et $a \in \mathbb{Z}$ un entier premier avec n. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note r_k le reste de la division euclidienne de a^k par n. Montrer que la suite (r_k) est périodique.
Quel est le reste de la division euclidienne de 3^{2003} par 5 ?
Montrer que $13|3^{126} + 5^{126}$.

Exercice 12

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_n = 2^{2^n} + 1$ (F_n est le n-ième nombre de Fermat). Montrer que $n \neq m \Longrightarrow F_n \wedge F_m = 1$.

Exercice 13

Soient m et n deux entiers naturels premiers entre eux et $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On veut résoudre le système de congruences :
$x \equiv a \bmod m$
$x \equiv b \bmod n$.
1) Montrer que si x_0 est une solution de ce système, $x \in \mathbb{Z}$ est une autre solution si et seulement si $mn \mid x - x_0$.
2) Soient u et v des coefficients de Bezout associés à m et n respectivement. Vérifier que $x_0 = mub + nva$ est solution de ce système.
3) Résoudre le système :
$x \equiv 2 \bmod 88$
$x \equiv 1 \bmod 27$.

Exercice 14 : Théorème de Wilson

Soit p un entier naturel premier, $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps. Déterminer tous les éléments de K qui sont leur propre inverse. (Dans un corps tout polynôme de degré n admet au plus n racines). Montrer que
$(p-1)! + 1 \equiv 0 \bmod p$.
Réciproquement montrer que si la congruence précédente est vérifiée l'entier naturel p est premier.

Exercice 15

Soit $x \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, p et q des entiers naturels non nuls et $d = p \wedge q$.
Montrer que $(x^p - 1) \wedge (x^q - 1) = x^d - 1$.