NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1

A quelle condition a t-on $|z-i| = |z+i|,\ z \in \mathbb{C}$?

Exercice 2

Mettre sous forme algébrique puis trigonométrique le nombre complexe

$$Z = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}.$$

Calculer Z^3.

Exercice 3

1) Linéariser $\cos^7 x$.
2) Calculer $\dfrac{\sin 6x}{\sin x}$ en fonction de $\cos x$.

Exercice 4

1)Calculer les sommes

$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos kx,\ T = \sum_{k=0}^{n} \sin kx.$$

2) Calculer les sommes

$$S = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos kx,\ T = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin kx.$$

Exercice 5

Résoudre les équations 1) $z^2 = -3-4i$.
2) $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$.
3) $z^2 + z + 1 = 0$.
4) $iz^2 + (-3+4i)z - 5 + i = 0$.
5) $16(z-1)^4 + (z+1)^4 = 0$.

Exercice 6

Déterminer 1) Les racines cinquièmes de $-i$.
2) Les racines sixièmes de

$$\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}.$$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
1) $z^6 + z^3 + 1 = 0$
2) $n \in N^*$ $,\alpha \in [0, \pi]$

$$(\frac{z-1}{z+1})^n + (\frac{z+1}{z-1})^n = 2\cos\alpha$$

3) $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$

$$(\frac{1+iz}{1-iz})^n = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$$

Exercice 8

Soit $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$.Calculer $S+T$ et ST. En déduire S.

Exercice 9

Soit a, b, c, trois complexes. Soit A, B, C les images de a, b, c, dans le plan complexe. Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ABC soit équilatéral est $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$.

Exercice 10

Soit $\varpi = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.
1) Déterminer l'équation du second degré qui admet $\varpi + \varpi^4$ et $\varpi^2 + \varpi^3$ pour solutions.
2) Soit A, B, C, D, E les images de $\varpi^0, \varpi, \varpi^2, \varpi^3, \varpi^4$ dans le plan complexe. Soit H le point d'intersection de $x'ox$ avec BE . Montrer que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OH}$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et de $\cos(\frac{4\pi}{5})$.
3) Trouver une construction à la règle et au compas du pentagone régulier.

exercice 11

1) Calculer

$$P = \prod_{k=1}^{n-1}(e^{2ki\pi/n} - 1)$$

après avoir factorisé en produits de polyômes du premier degré
$P(X) = X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2) Calculer

$$S = \prod_{k=1}^{n-1}(sink\pi/n)$$

. On pourra utiliser

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}).$$

Exercice 12

1) On note I, M, M' les points d'affixes repectives -1, z, z^2.
Repésenter le disque $D = \{z|\ |z+1| < \frac{1}{2}\}$. Montrer que $z \in D \Rightarrow |1+z^2| > 1$.
2) Soit z un nombre complexe de module 1 tel que $|1+z| < 1$. Montrer que $|1+z^2| > 1$.

1 Exercice 13

1) Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. En calculant $\overline{z}\, e^{ix}$ vérifier que

$$a\cos x + b \sin x = |z|\ \cos(x - \phi).$$

2) Résoudre l'équation $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$ et l'inéquation $\cos x + \sin x \geq 1$.

Exercice 14

1) Soit

$$z' = f(z) = 3iz + (i-3)\overline{z} + 1 - i$$

On note $M(z)$ et $M'(z')$. Déterminer les coordonnées x', y' de M' en fonction de x, y coordonnées de M. Montrer que F application du plan complexe associée à f est involutive.
2) Déterminer l'ensemble D des pôints invariants par F.
3) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{P}$ le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe et que le milieu du segment $[M, M']$ appartient à D. Quelle est l'application F ?

Exercice 15

1) Soit $P(z) = z^3 - (5+2i)z^2 + (11+5i)z - 12i$. Montrer que P admet une racine imaginaire pure et la déterminer. Résoudre l'équation $P(z) = 0$. Donner les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
2) On note A, B, C les images des racines de cette équation. Déterminer la nature du triangle ABC. Déterminer l'affixe de l'isobarycentre des points A, B, C.