CONIQUES

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Déterminer les éléments caractéristiques des coniques suivantes et tracer leur représentation graphique en faisant figurer les foyers et directrices.

a) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{8} = 1$.

b) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

c) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

d) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{2} = 1$.

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère les points $A(-1, 2)$, $B(1, 1)$.
1) Déterminer l'ensemble des points F foyer d'une conique de directrice associée (Ox), passant par les points A et B.
2) Préciser suivant la position de F sur cet ensemble le type de cette conique.

Exercice 3

Soient A et B deux points du plan, I le milieu de $[AB]$.Déterminer l'ensemble des points du plan tels que $MI^2 = MA.MB$.

Exercice 4

Soient A, B, C trois points de l'hyperbole équilatère d'équation $xy = 1$ (le repère est rapporté à ses asymptotes).
Montrer que l'orthocentre du triangle ABC est aussi un point de l'hyperbole.

Exercice 5

Déterminer le type et les éléments caractéristiques des courbes d'équation cartésienne :

$$a)\ x^2 - 2y^2 + x - 2y = 0\ ,\ b)\ y^2 + 3x - 4y = 2$$
$$c)\ x^2 + xy + y^2 = 1\ ,\ d)\ x^2 + \sqrt{3}xy + x = 2.$$

Exercice 6

Montrer qu'une ellipse peut être caractérisée par une équation du type :

$$(x - c)^2 + y^2 - (a - ex)^2 = 0$$

où a, b, c, e sont des paramètres caractéristiques de l'ellipse et où l'origine du repère est le centre de l'ellipse. En déduire une expression simple de la distance d'un point de l'ellipse au foyer $F\big|_0^c$. Etendre cette caractérisation en échangeant les deux foyers.

Exercice 7

La normale et la tangente à une parabole coupe respectivement l'axe focal en N et T. Déterminer le lieu du point P tel que $NMTP$ soit un rectangle, lorsque M décrit Γ. Que peut on dire des abscisses de M et de N ?

Exercice 8

Soient $a > b > 0$. Deux points P et Q décrivent respectivement des cercles de centres O et de rayons respectifs $a + b$ et $a - b$ de façon que l'axe des abscisses soit toujours bissectrice intérieure de l'angle des demi droites (OP, OQ). Que peut on dire du milie M de $[PQ]$ et de la normale en M à ce lieu ? En admettant que ce lieu est une coniques de foyer F et F' calculer le produit $MF.MF'$ en fonction de PQ.

Exercice 9

Un point M d'une hyperbole se projette orthogonalement en H et H' sur les deux asymptotes. Montrer que le produit $MH.MH'$ est constant.

Exercice 10

Ecrire une équation polaire d'une conique à centre, en prenant le centre Opour pôle et l'axe des abcisses pour axe polaire. En déduire que si P et Q décrivent une ellipse de façon que (OP) et (OQ) soient perpendiculaires, la droite (PQ) reste tangente à un cercle fixe. Retrouver ce résultat par un calcul direct à partir de la représentation paramétrique usuelle de l'ellipse.

Exercice 11

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère le cercle $\mathcal{C}_t$ de centre $\Omega_t(0, t)$, $t \neq 0$ et tangent à l'axe des abscisses. (Le rayon est donc $|t|$).
1) Ecrire l'équation du cercle $\mathcal{C}_t$.
2) On considère le point $A(\alpha, 0)$, $\alpha \neq 0$ et une droite D_α d'équation cartésienne
$x + vy + w = 0$. Déterminer v et w pour que $A \in D_\alpha$ et que D_α soit tangente au cercle C_t. (On montrera que $v = \dfrac{\alpha^2 - t^2}{2\alpha t}$, $w = -\alpha$).

3) Soit $B(\beta, 0)$, $\beta \neq 0$, $\beta \neq \alpha$. On appelle M le point d'intersection des tangentes D_α et D_β à $\mathcal{C}_t$ menées par A et B respectivement. Déterminer les coordonnées du point M et montrer qu'elles vérifient la relation :

$$C : \ 4\alpha\beta x^2 + (\alpha + \beta)^2 y^2 - 4\alpha\beta(\alpha + \beta)x = 0.$$

4) Quand t varie dans $\mathbb{R}^*$, C est une courbe. Que représente C si $\alpha = 1$, $\beta = -1$?
5) Dans cette question $\alpha = 2$, $\beta = -1$. Montrer que C est une hyperbole. Calculer l'excentricité de C et déterminer les coordonnées de ses foyers dans le repère R.
6) Dans cette question on suppose $0 < \alpha < \beta$. Montrer que C est une ellipse dont on déterminera les paramètres a, b, c ainsi que l'execentricité e.

Exercice 12

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(1, 0)$, $B(0, 1)$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points dont la somme des carrés des distances aux trois côtés du triangle OAB est égale à $\dfrac{1}{3}$.
1) Montrer que $\mathcal{E}$ est une ellipse dont on donnera une équation réduite et on précisera a, b, c et e.
2) Etudier l'intersection de $\mathcal{E}$ et de (Ox), conclusion ? Même question avec (Oy).
3) Etablir une représentation paramétrique de $\mathcal{E}$ dans le repère initial.