DENOMBREMENTS

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de listes (ou d'arrangements) d'entiers naturels non nuls dont la somme est n.
1) Calculer a_n pour $n \leq 3$.
2) Conjecturer la valeur de a_n. Montrer le résultat.

Exercice 2

Combien y a t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ avec $1 \leq p \leq n$.

Exercice 3

Soit E un ensemble à n éléments, $n \in \mathbb{N}^*$. calculer :

$$\sum_{X \subset E} card(X) \text{ et } \sum_{X,Y \subset E} card(X \cap Y).$$

Exercice 4

Soit E un ensemble à n éléments, $n \in \mathbb{N}^*$.
1) Combien y a t-il de couples (X,Y) de parties disjointes de E ?
2) Combien y a t-il de couples (X,Y) de parties de E telles que $X \cap Y$ soit un singleton ?

Exercice 5

Pour tout ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ on note u_n le nombre d'involutions de E dans E.
1) Calculer u_1, u_2, u_3.
2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)u_n$.

Exercice 6

1) Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} b_p$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} a_p$$

2) On appelle $d(n)$ le nombre de bijections de $[\![1,n]\!]$ sur lui même n'admettant aucun point invariants, bijections appelées dérangement de $[\![1,n]\!]$. Par convention $d(0) = 1$.
a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d(n-k)$.
b) en déduire que : $d(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k!$.

Exercice 7

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}, \ \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}, \ \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}.$$

Exercice 8

Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Exercice 9

Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq p$.
1) Déterminer le nombre de solutions dans $\{0,1\}^n$ de l'équation : $x_1 + x_2 + \cdots x_n = p$.

2) Déterminer le nombre de solutions de l'inéquation $x_1+x_2+\cdots x_n \leq p$, puis le nombre solutions de l'équation $x_1 + x_2 + \cdots x_n = p$ dans $(N^*)^n$.
On pourra établir une bijection entre l'ensemble des solutions de l'inéquation et l'ensemble des suites strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ contenant n éléments.

Exercice 10

On définit la fonction de Moëbius par :

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^k & \text{si } n = p_1 p_2 \cdots p_k, \ \ p_i \in P \\ 0 & \text{si } p^2 | n, \ p \in P \end{cases}$$

Montrer que

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 \text{ si } n = 1, \ \ 0 \text{ si } n > 1.$$

Exercice 11

Soient h et H deux fonctions définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant :

$H(n) = \sum_{d|n} h(d)$. Montrer que :
$h(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) H(d)$.

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*, \ n \geq 2$. On définit :

$$S_1 = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \text{ et } S_2 = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$$

Calculer $S_1 + S_2$ et $S_1 - S_2$. En déduire S_1 et S_2.