DERIVATION

Exercice 1

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ est-elle dérivable en 0?

Exercice 2

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
1) Si f est T-périodique, que peut-on dire de f' ?
1) Si f est impaire, que peut-on dire de f' ? Même question avec f paire.

Exercice 3

1) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}$.
2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$. Montrer que f est de classe C^∞sur $\mathbb{R}$

Exercice 4

Calculer la dérivée $n^{ième}$ des fonctions définies par $f_1(x) = \ln(x)$ $\quad f_2(x) = \frac{1-x}{1+x}$ $\quad f_3(x) = \sin^2 x$
$f_4(x) = x^{n-1} \ln x$ $\quad f_5(x) = (1 - x^2) \cos x$

Exercice 5

Soit $f :]-\frac{1}{2}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0 et nulle en 0.
1) Etudier la convergence des suites définies pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$ et $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{k}{n^2})$.
2) Montrer que la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$ est convergente. On note S sa limite.
3) Montrer que la suite définie pour $n \geq 1$ par $v_n = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{1}{k+n})$ est convergente et trouver sa limite en fonction de S et de $f'(0)$.
4) En prenant pour f la fonction $\ln(1 + x)$ trouver la valeur de S.

Exercice 6

Généralisation du théorème de Rolle :
1) Soit f continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe un $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$
2) Soit f une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.
Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 7

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable à l'ordre n sur $]a, b[$ qui s'annule en $n + 1$ points au moins. Montrer qu'il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 8

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
1) Montrer que si a et b sont deux éléments de I tels que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$, alors il existe c entre a et b tel que $f'(c) = 0$.
2) Montrer que $f'(I)$ est un intervalle .

Exercice 9

Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \left(\frac{1+x}{x}\right)^x < e < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}.$$

Exercice 10

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, déterminer :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^2(x+3h) - f^2(x-h)}{h}.$$

Exercice 11

1) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{k+1} < \ln \frac{k+1}{k} < \frac{1}{k}.$$

2) Déduire de la question précédente un encadrement de la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$$

Montrer que la suite (S_n) converge. La limite de cette suite est appelée constante d'Euler.

Exercice 12

Déterminer la dérivée n-ième de la fonction logarithme et la dérivée n-ième de la fonction $f : x \to x^{n-1} \ln x$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ayant n zéros $x_1, x_2, ..., x_n$ avec $x_1 < x_2 < .... < x_n$. On suppose que f est n fois dérivable sur $]x_1, x_n[$. Soit a un point de $[x_1, x_n]$, montrer qu'il existe un nombre λ avec $x_1 < \lambda < x_n$ tel que

$$f(a) = (a - x_1)(a - x_2)......(a - x_n)\frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}$$

Exercice 14

Déterminer l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(y) - f(x) = (y - x)f'(\frac{x + y}{2})$$

Exercice 15

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$
1) Montrer que la fonction P_n est une fonction polynôme de degré n, pair ou impair suivant la parité de n.
2) Montrer que $P_n(1) = 1$, en déduire $P_n(-1)$.
3) Montrer que P_n admet n zéros distincts entre -1 et 1.

Exercice 16

Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction polynôme $f(x) = x^n(1 - x)^n$. En déduire :

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2.$$

Exercice 17

Etudier les suites définies par :
1) $u_0 = 0,\ u_{n+1} = \cos u_n, n \in \mathbb{N}$.
2) $u_0 = 1/2,\ u_{n+1} = (1 - u_n)^2,\ n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18

On considère une fonction $f \in C^5(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ impaire .
1) Montrer que

$$\forall x > 0\ \exists \xi \in]0, x[\ \ f(x) = \frac{x}{3}(f'(x) + 2f'(0)) - \frac{x^5}{180} f^{(5)}(\xi)$$

2) Formule de Simpson En appliquant ce qui précède à la fonction
$g : x \to f(x + \frac{a+b}{2}) - f(-x + \frac{a+b}{2})$ montrer que pour une fonction quelconque $f \in C^5(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2\ \exists \xi \in]a, b[\ \ f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6}\left(f'(a) + f'(b) + 4f'(\frac{a+b}{2})\right) - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(5)}(\xi)$$

Remarque : pour la première question on pourra utiliser la fonction
$\phi : u \to f(u) - \frac{u}{3}(f'(u) + 2f'(0)) + \frac{u^5}{180} A$ où A est choisi tel que $\phi(x) = 0$ et établir qu'il existe u tel que $A = (1/u) f^{(4)}(u)$.

Exercice 19

1) Généralisation du théorème des accroissements finis.
En utilisant la fonction $h : x \to f(x) - f(a) - \dfrac{g(x) - g(a)}{g(b) - g(a)}(f(b) - f(a))$ où f et g sont des fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, montrer :

$$\exists c \in]a, b[,\ (g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c).$$

2) Règle de L'Hôpital.
Soient f et g deux fonctions continues sur $V =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et dérivables sur $V - \{x_0\}$, telles que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et $\forall x \in V - \{x_0\},\ g'(x) \neq 0$. montrer l'implication suivante :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

3) Déterminer les deux limites :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3},\ \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{x^2}.$$

4) La règle de L'Hôpital admet elle une réciproque ?

Exercice 20

1) En utilisant la convexité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ (vérifiez le) montrer l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 2e^{\frac{x}{2}} - 1.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x^{n+1} - (n + 1)x + n \geq 0.$$

Exercice 21

Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$. Montrer les inégalités :

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$