DETERMINANTS

Dans tous les exercices $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Exercice 1

1) Montrer que toute transposition de S_n peut s'écrire comme produit de transpositions de la forme $(i, i+1),\ i \in \{1..n-1\}$.
2) On considère le cycle $(1, 2, \cdots, n-1, n)$ et la transposition $\tau = (1, 2)$ de S_n. Calculer $\sigma^i\,\tau\,\sigma^{-i}$, $i \in \{1, 2, \cdots, n-2\}$. En déduire que toute transposition peut s'écrire comme produit où n'apparaissent que les permutations τ et σ, puis qu'il en est de même pour toute permutation de S_n.

Exercice 2

Décomposer la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

en produit de cycles disjoints puis en produit de transpositions.

Exercice 3

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

Exercice 4

Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 5

Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul.

Exercice 6

Soit D_n le déterminant de la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ de terme général :
$a_{ii} = 1 + x^2,\ a_{ij} = x$ si $|i - j| = 1,\ a_{ij} = 0$ dans les autres cas. Calculer D_1 et D_2. Montrer que $D_n = (1 + x^2)D_{n-1} - x\Delta_{n-1}$ où Δ_{n-1} est un déterminant d'ordre $n - 1$ que l'on précisera. Calculer D_n.

Exercice 7

On pose $a_{ij} = \min\{i, j\}, (i, j) \in \{1, 2, \cdots, n\}^2$. Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{ij})$.

exercice 8

1) Soit $D(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & v_1(x) \\ u_2(x) & v_2(x) \end{vmatrix}$ où u_1, v_1, u_2, v_2 sont des fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.Vérifier que D est dérivable sur I et donner une règle de calcul de $D'(x)$. Comment pourrait on généraliser cette règle pour un déterminant d'ordre n défini à partir de fonctions dérivables $u_1, u_2, \cdots, u_n$?
2) Calculer le déterminant

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ x & 1 & a & 1 \\ x^2 & 2x & a^2 & 2a \\ x^3 & 3x^2 & a^3 & 3a^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 9

Dans $\mathbb{R}^3$, rapporté à la base canonique, on considère l'endomorphisme f de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les réels λ pour lesquels $f - \lambda Id$ n'est pas inversible.
2) Déterminer les noyaux des endomorphismes $f - \lambda Id$ pour les λ obtenus.
3) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de A est diagonale.

Exercice 10

Résoudre en discutant suivant les valeurs de m.

$$\begin{cases} x + my + (m-1)z & = & m+1 \\ 3x + 2y + mz & = & 3 \\ (m-1)x + my + (m+1)z & = & m-1 \end{cases}$$

Exercice 11

Résoudre le système d'équations suivant

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & \alpha_1 \\ x_2 + x_3 & = & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} + x_n & = & \alpha_{n-1} \\ x_n + x_1 & = & \alpha_n \end{cases}$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 12

Calculer le déterminant de $A = (a_{ij})$ où $a_{ij} = |i - j|$.

Exercice 13

On considère les matrices à coefficients complexes

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&\lambda_1&0&0&0\\0&0&\lambda_2&0&0\\0&0&0&\lambda_3&0\\0&0&0&0&\lambda_4\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3&\lambda_4\\1&\lambda_1^2&\lambda_2^2&\lambda_3^2&\lambda_4^2\\1&\lambda_1^3&\lambda_2^3&\lambda_3^3&\lambda_4^3\\1&\lambda_1^4&\lambda_2^4&\lambda_3^4&\lambda_4^4\end{pmatrix}$$

où $\lambda_k = e^{\frac{i2k\pi}{5}}$.

1) Comparer les produits $P.D$ et $A.P$. Calculer A^2, A^3, A^4.

2)En déduire le déterminant

$$\begin{vmatrix}5&1&2&3&4\\4&5&1&2&3\\3&4&5&1&2\\2&3&4&5&1\\1&2&3&4&5\end{vmatrix}$$

Exercice 14

On définit

$$D_n(\alpha,\beta)=\begin{vmatrix}\alpha+\beta&\alpha\beta&0&\cdots&0\\1&\alpha+\beta&\alpha\beta&0&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&&&\alpha\beta\\0&\cdots&0&1&\alpha+\beta\end{vmatrix}$$

Montrer que

$$D_n(\alpha,\beta)=(\alpha+\beta)D_{n-1}(\alpha,\beta)-\alpha\beta D_{n-2}(\alpha,\beta)$$

Calculer $D_2(\alpha,\beta)$, en déduire $D_3(\alpha,\beta)$ puis la forme générale de $D_n(\alpha,\beta)$. Déduire de ce qui précède le déterminant

$$\begin{vmatrix}a&c&0&\cdots&0\\b&a&c&0&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&\\\vdots&&&&c\\0&\cdots&0&b&a\end{vmatrix}$$

Exercice 15

Calculer le déterminant suivant

$$D_n=\begin{vmatrix}a+b&b&b&\cdots&b\\a&a+b&b&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a&a&a&\cdots&a+b\end{vmatrix}$$