

DEVELOPPEMENTS LIMITES

Exercice 1

Déterminer les développements limités suivants :

- 1) $\frac{1}{\sqrt{3-x}}$ à l'ordre 2 en $x = 0$.
- 2) $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3 en $+\infty$.
- 3) $\tan x$ à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{4}$.
- 4) $\sqrt{\tan x}$ à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2

Déterminer les développements limités suivants :

- 1) $\arccos\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$ à l'ordre 2 en 0.
- 2) $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \ln x$ à l'ordre 4 en $+\infty$.

Exercice 3

Ecrire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\tan x$ et en déduire le développement à l'ordre 3 en 0 de $1 + \tan^2 x$ puis celui de $\tan x$ à l'ordre 4. En itérant le procédé calculer le développement limité de $\tan x$ à l'ordre 8 en 0.

Exercice 4

Déterminer le développement limité de $g : x \rightarrow \frac{x \ln(1+x^2)}{1-\cos x}$ à l'ordre 5 en 0.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow xe^{x^2}$. Montrer que f admet une fonction réciproque. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de f^{-1} en 0.

Exercice 6

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left((x+1)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}}\right) (x \ln x)^2}{x x^{\frac{1}{x}} - x}.$$

Exercice 7

1) Déterminer le développement limité à l'ordre 6 en 0 de $f : x \rightarrow \frac{1}{1-x^3}$. En déduire le développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de $g : x \rightarrow \frac{1}{1+x+x^2}$.

2) Déterminer le développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de $h : x \rightarrow \ln(1+x+x^2)$.

3) Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+x+x^2) - (2x+x^2)}{x^3}.$$

Exercice 8

- 1) Etudier la position de la courbe représentative de Arc tan par rapport à sa tangente au voisinage de 1
- 2) Même question avec la courbe représentative de $x - \frac{1}{1+e^x}$ au voisinage de 0.

Exercice 9

Etudier l'existence d'asymptote et la position de la courbe par rapport à celle-ci au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ pour chacune des applications définies de la manière suivante :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}, \quad f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, \quad f(x) = ((x^2-2)(x+3))^{\frac{1}{3}}$$

Exercice 10

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

Donner un développement de f en 0 à l'ordre 4.

Exercice 11

Montrer que l'équation $\tan x = x$ a une unique solution dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$. On note x_n cette unique solution.

- 1) Montrer que $x_n \sim n\pi$.
- 2) Montrer ensuite que $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$
- 3) Chercher un équivalent de

$$x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$$

Conclure que :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$