EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle sur chaque intervalle où $x\ln x$ ne s'annule pas.

$$(x\ln x)y' - y = -\frac{1}{x}(\ln x + 1).$$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle :

$$x(x^2-1)y' + 2y = x^2.$$

1) Déterminer les solutions réelles de cette équations dans chacun des intervalles $]-\infty,-1[,\ ]-1,0[,\ ]0,1[,\ ]1,+\infty[$.
2) Déterminer les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit$f$ une fonction de classe C^2 (c'est à dire deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et à dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}$). On définit g par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^x (x-t)g(t)dt + f(x).$$

Déterminer une équation différentielle du second ordre vérifiée par g. En déduire g lorsque $f(x) = \cos x$.

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles :
1) $y'' + y' - 6y = 1 - 8t - 30t^2$.
2) $y'' + y' = 3 + 2t$.
3) $y'' + 3y' + 2y = e^t$.
4) $y'' + 4y' + 4y = (16t^2 + 16t - 14)e^{2t}$.
5) $y'' - 3y' + 2y = (-3t^2 + 10t - 7)e^t$.
6) $y'' - 4y' + 4y = t\cosh 2t$.
7) $y'' + 4y = 4 + 2t - 8t^2 - 8t^3$.
8) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2t$.

Exercice 5

Déterminer une solution particulière, dans $\mathbb{C}$, de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = te^{(1+i)t}$. En déduire une solution particulière, dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = te^t\cos t$ puis résoudre cette dernière équation dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6

On considére les deux équations différentielles (1) $y'' + y = \sin 3t$, (2) $y'' + y = \sin t$.
Déterminer une solution particulière de (1) sous la forme $f_1(t) = a\cos 3t + b\sin 3t$ et une solution particuliére de (2) sous la forme $f_2(t) = (ct+d)\cos t + (et+f)\sin t$.
Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \sin^3 t$ en utilisant les résultats précédents et l'égalité

$$\sin^3 t = -\frac{1}{4}\sin 3t + \frac{3}{4}\sin t.$$

Exercice 7

Résoudre l'équation différentielle
$$(1+t)^2 y'' + (1+t)y' - 2 = 0$$
sur tout intervalle ne contenant pas -1.
Remarque : On fera le changement de fonction $z = y'$.

Exercice 8

résoudre l'équation différentielle avec la condition initiale

$$y'' + 2y' + 5y = \cos t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

On déterminera une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $a\cos t + b\sin t$.

Exercice 9

Résoudre l'équation différentielle
$$y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{\sqrt{x^2+1}}$$
On pose $y_1(x) = e^{-3x},\ y_2(x) = xe^{-3x}$. On déterminera une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme
$y(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$ où u et v sont deux fonctions que l'on veut déterminer, en leur imposant de plus la condition
$y'(x) = u(x)y_1'(x) + v(x)y_2'(x)$. Monter que les deux égalités précédentes entrainent

$$\begin{cases} u'y_1 + v'y_2 & = & 0 \\ u'y_1' + v'y_2' & = & \frac{e^{-3x}}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$$

En déduire les fonctions u et v puis une solution particulière de l'équation avec second membre. En déduire la solution générale de l'équation différentielle avec second membre.

Exercice 10

Résoudre les équations du premier ordre suivantes sur les intervalles où $a(t)$ ne s'annule pas :

1) $y' + 2y = t^2 - 2t + 3$. On déterminera une solution particulière sous la forme d'une fonction polynôme du second degré.
2) $(t\ln t)y' - y = -\frac{1}{t}(\ln t + 1)$.
3) $(1+t)y' + y = 1 + \ln(1+t)$.
4) $(1-t)y' + y = \frac{t-1}{t}$.
5) $y' + y = \frac{1}{1+e^t}$.