ESPACES PREHILBERTIENS REELS

Exercice 1

Montrer que :

$$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,; (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2).$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 2

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien. Montrer que :

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp, \ (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}^3$, on définit sur E une forme bilinéaire symétrique par

$$((x, y, z)|('x', y', z')) = xx' + yy' + zz' + \frac{1}{2}(xy' + x'y + xz' + x'z + yz' + y'z).$$

Vérifier qu'elle définit un produit scalaire sur E. Construire une base orthonormée par le procédé de Gram-Schmidt à partir de la base canonique de E.

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. F est le sous-espace vectoriel défini par :

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4), x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

Déterminer une base orthonormée de F. Déterminer la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur F.

Exercice 5

Soit E un espace euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B} = (u, v, w)$ une base othonormée de E.
1) Soit $n = au + bv + cw, \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur normé de E. Déterminer la matrice P, dans $\mathcal{B}$, de la projection orthogonale sur $\mathbb{R}n$.
2) Etudier l'endomorphime g de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$Q = \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ba & -ca \\ -ab & c^2 + a^2 & -cb \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

3) Déterminer la matrice S de la réflexion s dont le plan H a pour équation $x - 2y + z = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 6

On définit sur $\mathbb{R}[X]$
$$(P,Q)=\int_0^1 P(x)Q(x)dx.$$
1) Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
3) Calculer
$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 (x^2-ax-b)^2dx$$
en traduisant le problème sous forme de distance à un sous-espace.

Exercice 7

Soit E un espace euclidien $(e_1,e_2,e_3,\cdots,e_n)$ un système de vecteurs unitaires de E tels que $\forall x\in E,\ ||x||^2=\sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$. Montrer que $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 8

On considère un espace euclidien de dimension n et $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x\in E\ ,\ (u(x)|x)=0$. Montrer que Ker(u) et Im(u) sont supplémentaires orthogonaux et que le rang de u est pair .

Exercice 9

On considère une matrice orthogonale $A=(\alpha_{ij})\ ,\ (i,j)\in\{1,2,\cdots,n\}^2$ élément de $O_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $K=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}$ on a $|K|\leq n$ et $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\leq n\sqrt{n}$.

Exercice 10

On appelle $E=\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|\sum_{n=0}^{\infty}u_n^2<\infty\}$.Montrer que si (u_n) et (v_n) sont éléments de E on a $\sum_{n=0}^{\infty}|u_nv_n|<\infty$. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et que l'application $E\times E\to\mathbb{R}$ $((u_n),(v_n))\to\sum_{n=0}^{\infty}u_nv_n$ est un produit scalaire sur E. Montrer que F ensemble des suites de E comprenant au plus un nombre fini de termes non nuls est un sous-espace de E. Déterminer une base de F et en déduire l'orthogonal de F. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Exercice 11

On considère l'espace vectoriel $E=C([-1,1],\mathbb{R})$. Montrer que $(f,g)\to\int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E.
1) On définit $P_n(x)=\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ Montrer que $(P_n|P_m)=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$
Rappel : $\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2n+1}d\theta=\frac{(2^nn!)^2}{(2n+1)!}$
2) Calculer P_0,P_1,P_2,P_3 . En déduire une base orthonormée du sous espace vectoriel $F=\mathrm{Vec}(1,x,x^2,x^3)$.
3) Déterminer la projection orthogonale de $f:x\to x^4$ sur F.

Exercice 12

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E qui vérifie :
$$\forall(x,y)\in E^2,\ (f(x)|y)=(x|f(y)).$$

Montrer que la matrice de f dans une base orthonormée est symétrique.
Montrer que, si réciproquement, la matrice de f dans une base orthonormée est symétrique, alors elle l'est dans toute base orthonormée et que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ (f(x)|y) = (x|f(y)).$$

Exercice 13

Soit E un espace euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E. On considère un endomorphisme f de E de matrice

$$A = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{B}$. Montrer que $f \in O(E)$. Déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 14

Soit E un espace euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E. On considère un endomorphisme f de E de matrice

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \\ 2 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{B}$. Montrer que $f \in O(E)$. Déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 15

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2. De quel type est l'automorphisme f ?

Exercice 16

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Etudier f.

Exercice 17

Soit $R_{(f,\theta)}$ la rotation d'angle θ autour du vecteur unitaire f dans l'espace euclidien de dimension 3 rapporté à la base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
1) Soit $x \in E$. En écrivant $x = x_1 + x_2,\ x_1 \in \text{Vect}(f),\ x_2 \in \{f\}^\perp$, montrer que
$R_{(f,\theta)}(x) = \cos\theta\, x + (x|f)(1-\cos\theta) f + (f \wedge x)\sin\theta$.
2) Déterminer la matrice de la rotation R autour de $f = \dfrac{1}{3}(2e_1 - 2e_2 - e_3)$ et d'angle θ défini par $\cos\theta = \dfrac{4}{5},\ \sin\theta = \dfrac{3}{5}$.

Exercice 18

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{F} = (x_1,\, x_2,\, \cdots\, x_n)$ une famille de vecteurs de E. On note $(.|.)$ le produit scalaire. On définit $a_{i,j} = (x_i|x_j)$ et $A = (a_{i,j})_{1\leq i,\, j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $G(x_1,\, x_2,\, \cdots\, x_n)$ le déterminant de la matrice A, appelé déterminant de Gram de ces n vecteurs.

1) a)On suppose que les n vecteurs de $\mathcal{F}$ forment une famille libre et on appelle $F = \text{vect}(x_1,\, x_2,\, \cdots\, x_n)$, sous espace vectoriel de E de dimension n. On apelle $B = (e_1,\, e_2,\, \cdots\, e_n)$ une base orthonormale de F et on note : $x_j = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} e_i$ la décomposition du vecteur x_j dans la base B pour $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$.
On appelle $U = (b_{i,j})_{1\leq i,\, j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Exprimer la matrice A en fonction de la matrice U et de sa transposée. En déduire que $G(x_1,\, x_2,\, \cdots\, x_n) > 0$.

b) Que peut on dire de ce déterminant si $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R}$.

2)On suppose que $\mathcal{F} = (x_1,\, x_2,\, \cdots\, x_n)$ est une famille libre. On utilise les notations précédentes. Soit $x \in E$
Montrer que

$$d^2(x, F) = ||x - P_F x||^2 = \frac{G(x, x_1,\, x_2,\, \cdots\, x_n)}{G(x_1,\, x_2,\, \cdots\, x_n)}.$$

Exercice 19

Soit F un sous espace vectoriel de l'espace euclidien E, u et v des automorphismes orthogonaux respectivement de F et de $F^{\perp}$. Montrer que l'application de E vers E définie par :
$\forall x \in E,\ f(x) = u\,(p(x)) + v\,(x - p(x))$ où p est la projection othogonale sur F, est bien définie et est un automorphisme orthogonal de E.

Exercice 20

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et u un vecteur de l'espace euclidien E. On considère l'application f définie par :
$\forall x \in E,\ f(x) = x + \lambda(x|u)u$.
Quelle est une condition nécessaire sur λ et sur u pour que f soit un automorphisme orthogonal ? Que représente f dans ce cas .

Exercice 21

Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ n vecteurs de l'espace euclidien E. En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram Schmidt montrer que :

$$|Det(x_1, x_2, \cdots, x_n)| \leq ||x_1||\,||x_2|| \cdots ||x_n||$$

Exercice 22

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ munit du produit scalaire canonique, c'est à dire :
$(A|B) = Tr(A\,{}^tB)$. On note $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices symétriques respectivement antisymétriques.
1) Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont supplémentaires orthogonaux.
2) Déterminer la projection orthogonale d'une matrice sur $\mathcal{S}$.