ESPACES VECTORIELS

Exercice 1

Soit $E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \, |\exists k \in \mathbb{R}_+, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x)| \leq k|x|\}$. Montrer que pour les lois usuelles, E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

Exercice 2

Parmi ces trois applications de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$, lesquelles sont linéaires ?

$$f(x,y,z) = (2x, y+z, 2x+5y-z), \ g(x,y,z) = (y+3z, 2y-4x, xz), \ h(x,y,z) = (x,y,z+1).$$

Exercice 3

Soient E et F des K-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Montrer que l'application $\phi : E \times F \to E \times F$, $(x,y) \to (x, y - f(x))$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $E \times F$.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $F = E \times E$. On définit sur F une opération externe sur $\mathbb{C}$ par $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \ \forall (x,y) \in F, \ (a+ib)(x,y) = (ax-by, ay+bx)$. Montrer que F muni de l'addition usuelle et de cette loi de composition externe est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Exercice 5

Soit E un K-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^2 - 5f + 6Id_E = \theta_E$. Montrer que $E = \ker(f - 2Id_E) \oplus \ker(f - 3Id_E)$.

Exercice 6

Soit E un K-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^5 = \theta_E$. Montrer que $u + Id_E$ est un automorphisme de E et exprimer son inverse comme somme de puissances de u.

Exercice 7

Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C^0([0,1], \mathbb{R})$ et p réels $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ deux à deux distincts dans $[0,1]$. On pose :

$$F = \{f \in E \, |\forall i \in \{1, \cdots, p\}, \ f(\alpha_i) = 0\}.$$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2) On appelle $f_i, \ i \in \{1, 2, \cdots, p\}$ les fonctions polynômes définies par :

$$f_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{p} \left(\frac{x - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j} \right), \ x \in [0,1]$$

Vérifier que la fonction $g \in E$ définie par :
$g(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{p} f(\alpha_i) f_i(x)$ où $f \in E$, est un élément de F. Vérifier que $G = \text{Vect}\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$ est un sous espace vectoriel supplémentaire de F

Exercice 8

Soient E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère les endomorphismes $D : f \to f'$et P qui à $f \in E$ fait correspondre sa primitive qui s'annule en 0. Déterminer les noyaux, images et sous-espaces des vecteurs invariants par $D,\ P,\ D \circ P,\ P \circ D$.

Exercice 9

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que
1)$Ker(f) = Ker(f^2) \Longleftrightarrow Im(f) \cap Ker(f) = \{0\}$
2) $Im(f) = Im(f^2) \Longleftrightarrow Im(f) + Ker(f) = E$
3) si $f^2 - 2f + id = 0$ alors f est un automorphisme et déterminer f^{-1}

Exercice 10

Soit f$\in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E \quad (x, f(x))$ liée.Montrer que f est une homothétie.

Exercice 11

Soit E un K ev de dimension finie. Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.Montrer que si $E = Im(f) + Ker(g)$ et $E = Im(g) + Ker(f)$ alors les sommes sont directes.

Exercice 12

Soient p et q des projecteurs d'un K-espace vectoriel E tels que $p + q$ soit également un projecteur. Montrer que :

$$p \circ q = q \circ p = 0,\ im\,(p + q) = im\, p \oplus im\, q,\ \ker(p + q) = \ker p \cap \ker q.$$

Exercice 13

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé. On identifie E à $\mathbb{R}^3$ en identifiant un point et le triplet de ses coordonnées. On définit une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x) = x \wedge u,\ u \in \mathbb{R}^3.$$

Vérifier que f est linéaire. f est-elle injective ? Montrer que f^3 et f sont proportionnelles. Rappel :

$$(u \wedge v) \wedge w = (u.\,w)v - (v.\,w)u.$$

Exercice 14

Soit E un K-espace vectoriel et $g \in \mathcal{L}(E)$On définit ϕ_g de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même par :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \phi_g(f) = f \circ g - g \circ f.$$

Montrer que ϕ_g est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et que si g est nilpotent, alors ϕ_g l'est également.

Exercice 15

Soient a et b deux nombres complexes distincts. Montrer que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 admettant a et b comme racines est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_4[X]$. Trouver une base de cet espace.

Exercice 16

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ où $f_n : x \to \sin nx$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 17

1) Soit $\mathcal{E} = \{(1,0,1,0), (1,1,0,0), (-1,-1,1,0), (0,0,2,0)\}$. Montrer que $\dim_{\mathbb{R}}(\text{vect}(\mathcal{E})) = 3$.
2)Soit $\mathcal{E} = (X^2 + X + 1, X^2 + 3X + 1, 2X, X^3 + 3)$. Déterminer $\dim_{\mathbb{R}}(\text{vect}(\mathcal{E}))$.

Exercice 18

1) Soit E un K espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E. On considère $f_i : E \to K,\ x \to x_i,\ i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ où $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Montrer que les $f_i,\ i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ sont des formes linéaires et qu'elles forment une base de E^*.
2) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, on définit les $n+1$ formes linéaires :

$$\phi_k : P \to P^{(k)}(0),\ k \in \{0, 1, \cdots, n\}.$$

Montrer que la famille $(\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_n)$ est une base de E^*.

Exercice 19

Soit E un K espace-vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer que x_0 étant un vecteur tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$, la famille $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

Exercice 20

Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ n réels distincts. Montrer que la famille $f_i,\ i \in \{1, 2, \cdots, n\},\ f_i : x \to |x - a_i|$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Exercice 21

Soit $E = \mathbb{C}[X]$ et $p \in \mathbb{N}$. On définit l'endomorphisme f de E par $f(P) = (1 - pX)P + X^2 P'$. Montrer que f est injective mais n'est pas surjective.

Exercice 22

Soient E un K-espace vectoriel de dimension$n \geq 2$ et F un sous-espace vectoriel de E différent de $\{0\}$ et de E. On considère un supplémentaire G de F dans E et une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ de G. Soit $a \in F$, Vérifier que $\mathcal{B}_2 = (a + e_1, a + e_2, \cdots, a + e_p)$ est une famille libre de E et qu'elle engendre un supplémentaire de F noté G_a. Montrer que $(a, b) \in F^2,\ G_a = G_b \Leftrightarrow a = b$.

Exercice 23

Dans $\mathbb{R}^5$ on considère la famille

$$\mathcal{E} = (u_1 = (2,3,-3,4,2), u_2 = (3,6,-2,5,9), u_3 = (7,18,-2,7,7), u_4 = (2,4,-2,3,1)).$$

Déterminer le rang de $\mathcal{E}$, déterminer une relation de liaison entre ces quatre vecteurs.

Exercice 24

Soit E un K-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0, f^2 \neq 0$. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E. Montrer que $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f si et seulement si $g \in \text{vect}(Id_E, f, f^2)$.

Exercice 25

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ où :

$$e_1(t) = \sin t, e_2(t) = \cos t, e_3(t) = \sin 2t, e_4(t) = \cos 2t,\ V = \text{vect }(\mathcal{E}).$$

Montrer que V est de dimension 4. On définit $\phi_i \in E^*$ par

$$\phi_i(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e_i(t)dt,\ i \in \{1,2,3,4\}.$$

Montrer que $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ est la base duale de $\mathcal{E}$.

Exercice 26

Soient $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z)|x+y+z=0\}$, $G = \mathbb{R}\,a$ où $a = (1,1,1)$. Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 27

1) On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longrightarrow \left(\frac{2x-y-z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3}\right).$$

Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer f^2. En déduire la nature de l'endomorphisme f.

2) On considére l'application

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longrightarrow \left(\frac{x-2y-2z}{3}, \frac{-2x+y-2z}{3}, \frac{-2x-2y+z}{3}\right).$$

Montrer que $g \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer g^2. En déduire la nature de l'endomorphisme g.

Exercice 28

On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$, ensemble des polynomes de degré $\leq n$. Etant donnés $b_0, b_1, \cdots, b_n$ réels on leur associe $u_i \in E^*$, $u_i : P \to P(b_i)$.

1) Montrer l'équivalence

$$\text{les } u_i \text{ sont indépendantes} \Longleftrightarrow \text{les } b_i \text{ sont deux à deux distincts}$$

2) On suppose les b_i deux à deux distincts. Montrer qu'il existe $c_0, c_1, \cdots, c_n$ réels tels que si $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ on ait

$$\forall P \in E \int_0^1 f(x)P(x)dx = \sum_{k=0}^{n} c_k P(b_k)$$

3)Exemple

$$n = 1, b_0 = 0, b_1 = 1, f(x) = sin\omega x, \omega \neq 0$$