ESPACES VECTORIELS. II

Exercice 1

Soient a et b deux nombres complexes distincts. Montrer que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 admettant a et b comme racines est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_4[X]$. Trouver une base de cet espace.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ où $f_n : x \to \sin nx$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 3

1) Soit $\mathcal{E} = \{(1,0,1,0), (1,1,0,0), (-1,-1,1,0), (0,0,2,0)\}$. Montrer que $\dim_{\mathbb{R}}(\text{vect}(\mathcal{E})) = 3$.
2)Soit $\mathcal{E} = (X^2+X+1, X^2+3X+1, 2X, X^3+3)$. Déterminer $\dim_{\mathbb{R}}(\text{vect}(\mathcal{E}))$.

Exercice 4

1) Soit E un K espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E. On considère $f_i : E \to K,\ x \to x_i,\ i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ où $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Montrer que les $f_i,\ i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ sont des formes linéaires et qu'elles forment une base de E^*.
2) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, on définit les $n+1$ formes linéaires :

$$\phi_k : P \to P^{(k)}(0),\ k \in \{0, 1, \cdots, n\}.$$

Montrer que la famille $(\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_n)$ est une base de E^*.

Exercice 5

Soit E un K espace-vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer que x_0 étant un vecteur tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$, la famille $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

Exercice 6

Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ n réels distincts. Montrer que la famille $f_i,\ i \in \{1, 2, \cdots, n\},\ f_i : x \to |x - a_i|$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Exercice 7

Soit $E = \mathbb{C}[X]$ et $p \in \mathbb{N}$. On définit l'endomorphisme f de E par $f(P) = (1 - pX)P + X^2 P'$. Montrer que f est injective mais n'est pas surjective.

Exercice 8

Soit E un K ev.Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.Montrer que si $E = Im(f) + Ker(g)$ et $E = Im(g) + Ker(f)$ alors les sommes sont directes.

Exercice 9

Soient E un K-espace vectoriel de dimension$n \geq 2$ et F un sous-espace vectoriel de E différent de $\{0\}$ et de E. On considère un supplémentaire G de F dans E et une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ de G. Soit $a \in F$, Vérifier que $\mathcal{B}_2 = (a + e_1, a + e_2, \cdots, a + e_p)$ est une famille libre de E et qu'elle engendre un supplémentaire de F noté G_a. Montrer que $(a, b) \in F^2,\ G_a = G_b \Leftrightarrow a = b$.

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}^5$ on considère la famille

$$\mathcal{E} = (u_1 = (2, 3, -3, 4, 2), u_2 = (3, 6, -2, 5, 9), u_3 = (7, 18, -2, 7, 7), u_4 = (2, 4, -2, 3, 1)).$$

Déterminer le rang de $\mathcal{E}$, déterminer une relation de liaison entre ces quatre vecteurs.

Exercice 11

Soit E un K-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0, f^2 \neq 0$. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E. Montrer que $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f si et seulement si $g \in \text{vect}(Id_E, f, f^2)$.

Exercice 12

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ où :

$$e_1(t) = \sin t, e_2(t) = \cos t, e_3(t) = \sin 2t, e_4(t) = \cos 2t,\ V = \text{vect }(\mathcal{E}).$$

Montrer que V est de dimension 4. On définit $\phi_i \in E^*$ par

$$\phi_i(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e_i(t) dt,\ i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Montrer que $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ est la base duale de $\mathcal{E}$.