FONCTIONS RELLES. LIMITES, CONTINUITE

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes si elles existent :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x},\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x},\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}-x,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}.$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x \text{ est un entier premier}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Montrer que pour tout $x>1$ la suite $(f(nx))$ converge vers 0. On distinguera les cas $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ et $x\in\mathbb{Q}$.
La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x)=x^2E\left(\frac{1}{x}\right).$$

Quels sont les points de continuité de f ?
Déterminer les limites à droite et à gauche en un point de discontinuité de f.

Exercice 4

1) Montrer que la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si } x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$$

est discontinue en tout point.
2) Soit f la fonction définie par :

$$f(-1)=f(1)=0,\ f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}+1}{x^{2n}-1},\ x\neq -1,\ x\neq 1.$$

Etudier la continuité de f.

Exercice 5

On considère la fonction$f$ définie sur l'intervalle $I=[1,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^{E(x)}}{E(x)^x}.$$

1) a) Montrer que f est continue à droite en tout point de I.
b) Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer la limite à gauche de f en p.

f est-elle continue à gauche en tout point de I ?
2) Déterminer les limites des suites $(f(u_n))$:

$$a)\ u_n = n,\ b)\ u_n = n + \frac{1}{2},\ c)\ u_n = n + \frac{1}{\ln n}.$$

3) La fonction f admet elle une limite finie ou infinie en $+\infty$?
4) Démontrer que $\forall a \in [0,1]$ il existe une suite (u_n) tendant vers $+\infty$ telle que la suite $(f(u_n))$ converge vers a.

Exercice 6

Soit f une fonction croissante définie sur $[a,b]$ prenant toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$: $\forall y \in [f(a), f(b)],\ \exists x \in [a,b] : f(x) = y$. Montrer que f est continue en tout point de $[a,b]$.

Exercice 7

Soit$f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x).$$

Montrer que f est constante.

Exercice 8

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe $x_n \in [0,1]$ tel que $f(x_n) = f(x_n + \dfrac{1}{n})$.
On utilisera la fonction $\delta : [0, 1 - 1/n] \to \mathbb{R}$ définie par $\delta(x) = f(x + 1/n) - f(x)$ et on calculera $\sum_{k=0}^{n-1} \delta\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

Exercice 9

1) Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in [0,n]$ racine de l'équation $e^x = x^n$.
2) Montrer que la suite (x_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 10

Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$ telle que $\lim_{+\infty} f = 0$, montrer que f est bornée sur $[0,+\infty[$. On suppose de plus que $f(0) = 0$. Montrer que les deux bornes $\sup_{[0,+\infty[} f$ et $\inf_{[0,+\infty[} f$ sont atteintes sur $[0,+\infty[$ et que l'une au moins des deux l'est dans $]0,+\infty[$.

Exercice 11

1) Déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On commencera par démontrer que $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = xf(1)$.
2) En déduire les fonctions g continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x+y) = g(x) + g(y) + xy.$$

On se ramènera à la première équation en posant $g(x) = f(x) + \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 12

Soit f une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On appelle α un réel strictement positif tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq 1.$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |f(n\alpha)-f(0)| \leq n$.
2) Montrer que si $x \in \mathbb{R},\ p = E(\frac{x}{\alpha})$, on a $|f(x)| \leq p+1+|f(0)|$. En déduire que $|f(x)| \leq \frac{x}{\alpha} + |f(0)| + 1$.

Exercice 13

Soient f et g deux fonctions continues sur $I = [a,b]$. On définit la fonction ϕ sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = \sup_{t\in I}(f(t)+xg(t))$. Montrer que ϕ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14

Montrer que $x \to \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction $f : x \to \sqrt{x}(3-\sqrt{x})$ est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 15

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle que l'on déterminera. Déterminer sa bijection réciproque.

exercice 16

1) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et f une fonction réelle continue sur $[a,b]$ et à valeurs dans $[a,b]$. Montrer qu'elle admet un point fixe.
2) Montrer que si f est k lipschitzienne avec $0 < k < 1$ le point fixe est unique.

Exercice 17

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et f une application réelle continue sur $[a,b]$ vérifiant $f(a) \neq f(b)$ et $(u,v) \in \mathbb{R}_+^{*2}$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$uf(a)+vf(b) = (u+v)f(c).$$