FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Exercice 1

Les fonctions suivantes suivantes ont-elles une limite en $(0,0)$?

1)
$$f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

2)
$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

3)
$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}.$$

4)
$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2-1}{x}\sin x.$$

5)
$$f(x,y) = \frac{\sin x^2 + \sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Exercice 2

Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1+x+y > 0\}$. Vérifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
On appelle f la fonction définie sur U par $f(x,y) = \dfrac{\sin(x+y)}{\ln(1+x+y)}$ si $x+y \neq 0$ et $f(x,-x) = 1$. Etudier la continuité de f sur U.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
1) Etudier la continuité en $(0,0)$ des restrictions de f aux droites passant par $(0,0)$.
2) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 4

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ et $u \in \mathbb{R}^2$. On appelle distance de u à la partie A le réel

$$d(u,A) = \inf_{a\in A} ||u-a||.$$

Montrer que l'application définie par $d(u) = d(u,A)$ est continue.
Montrer que $d(u,A) = 0$ si et seulement si u est adhérent à A.

Exercice 5

Soit $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Exercice 6

On considère la fonction f définie par $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0)=0$. Vérifier que le dénominateur ne s'annule qu'en $(0,0)$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \dfrac{e^x - e^y}{x-y}$ si $x \neq y$ et $f(x,x) = e^x$. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = e^x \phi(y-x)$ où $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction que l'on explicitera. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8

Soit $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \text{ si } x \neq y, \quad \text{et } g(x,x) = f'(x).$$

1) Etudier la continuité de g sur $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que si f est deux fois dérivable, g admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^6} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

Montrer que cette fonction a des dérivées suivant tous les vecteurs en $(0,0)$, mais qu'elle n'est pas continue en ce point.

Exercice 10

Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{\sin xy}{|x|+|y|} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11

Etudier les extremas des fonctions suivantes :
1) $f(x,y) = x^3 + y^3$ sur $\mathbb{R}^2$.
2) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \sin(x^2+y^2)$ sur $[-1,1]^2$.
3) $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2x - 10y + 2xy + 6$ sur $\mathbb{R}^2$.
4) $f(x,y) = e^{x\cos y}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes en utilisant les coordonnées polaires :

$$1)\ x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

$$2)\ x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et F définie par :

$$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Calculer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$, et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}$. En déduire l'expression du laplacien

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

en fonction de F, r, θ et des dérivées partielles de F.

Exercice 14

Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$. On dit que f est homogène de degré r si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t > 0,\ f(tx,ty) = t^r f(x,y).$$

1) Montrer que les dérivées partielles d'une fonction homogène de degré r sont homogènes de degré $r-1$.
2) Montrer que f est homogène si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = rf(x,y).$$

Exercice 15

Soient u et v des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,t) = \frac{1}{2}\left(u(x+t) + u(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} v(s)ds\right).$$

1) Calculer $f(x,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)$. On veut déterminer des fonctions y de classe C^2 sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}$ telles que :

. $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 0$ sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}$.
. $y(0,t) = y(\pi,t) = 0,\ t \in R$.
. $y(x,0) = \sin x,\ x \in [0,\pi]$.
. $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \sin 2x,\ x \in [0,\pi]$.

Vérifier que la fonction $y_0$définie sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}$ en prenant $u(x) = \sin x,\ v(x) = \sin 2x, x \in [0,\pi]$ est solution de ce problème.
On pose $z = y - y_0$, exprimer les conditions ci dessus pour z. Résoudre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x,t) = 0$$

sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}$ en utilisant le changement de variable $u = x+t,\ v = x-t$. Montrer que y_0 est la solution unique du problème.

3) Calculer

$$I(t) = \int_0^{\pi} \left(\left(\frac{\partial y_0}{\partial x}(x,t) \right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial t}(x,t) \right)^2 \right) dx,\ t \in \mathbb{R}.$$