FONCTIONS USUELLES

Exercice 1

On considère la fonction

$$f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} E\left(\frac{x+k}{n}\right)$$

Calculer $f(x)$ pour $x \in [0,1[$ et montrer que $f(x+1) = f(x)+1$.
En déduire la somme :

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right).$$

Exercice 2

On considère la fonction :

$$f :\longmapsto (x+1)\ln x - 2(x-1),\ x \in \mathbb{R}_+^*$$

Déterminer les dériées première et seconde de cette fonction. En déduire les variations de f.
En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\},\ \frac{x+1}{x-1}\ln x \geq 2.$$

Exercice 3

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\ln x}},\ f_2 : x \longmapsto \frac{\ln(x^2-4)}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$$

$$f_3 : x \longmapsto \ln\left(\tan\frac{\pi x}{2}\right),\ f_4 : x \longmapsto \frac{\sqrt{1-\tan x}}{\arcsin(4x)}.$$

Exercice 4

Montrer les relations
1) $\forall x \in [-1,1],\ \arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.
2) $\forall x \neq 0,\ \arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \varepsilon\dfrac{\pi}{2}$ où $\varepsilon = -1$ si $x < 0$, $\varepsilon = 1$ si $x > 0$.

Exercice 5

Comparer $\arctan x + \arctan y$ et $\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$ en discutant en fonction du signe de $x+y$ et $1-xy$.

Exercice 6

Simplifier les expressions $\cos(\arctan x),\ \sin(\arctan x),\ \tan(2\arctan x),\ \tan(\arcsin x)$
$\tan(\arccos x),\ \arcsin(\dfrac{2x}{1+x^2})$.

Exercice 7

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées.

1)

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

2)

$$g(x) = \sqrt{\frac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}.$$

Exercice 8

Résoudre l'équation

$$\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 9

Vérifier les égalités
$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$.
$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a$.
$\tanh(a+b) = \dfrac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$.
$\cosh 2a = \cosh^2 a + \sinh^2 b,\ \sinh 2a = 2 \sinh a \cosh a$.

Exercice 10

Simplifier

1)
$$\frac{\cosh(\ln x) + \sinh(\ln x)}{x}.$$

2)
$$\sinh^2 x \cos^2 y + \cosh^2 x \sin^2 y.$$

Exercice 11

Résoudre l'équation $\cosh x = 2$.

Exercice 12

Montrer que $\arctan(e^x) - \arctan(\tanh \frac{x}{2})$ est une constante C à déterminer.

Exercice 13

Simplifier les expressions suivantes

1)
$$\operatorname{argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right).$$

2)
$$\operatorname{argch}(2x^2-1).$$

3)
$$\operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}\right).$$

Exercice 14

Montrer
$$\forall (x,y) \in]-1,1[^2,\ \operatorname{argth} x + \operatorname{argth} y = \operatorname{argth}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

Exercice 15

Résoudre le système
$$\begin{cases} \operatorname{argsh} x &= 2\operatorname{argsh} y \\ 3 \ln x &= 2 \ln y \end{cases}$$

Exercice 16

Calculer les sommes

$$C=\sum_{k=0}^{n}\cosh(a+kb),\ S=\sum_{k=0}^{n}\sinh(a+kb),\ (a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{*}.$$

Exercice 17

Etudier la fonction

$$f(x)=\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

et tracer sa courbe représentative.

Exercice 18

1) Résoudre l'équation $\log_x 10 = 2\log_{10x}10 + 3\log_{100x}10\ ,\ x\in\mathbb{R}$.

2) Résoudre l'équation $2^{2x}-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$.

Exercice 19

Résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R},\ 5\cosh x - 4\sinh x = 3$.

Exercice 20

Linéariser l'expression $\cosh^4 x\,.\sinh^2 x$.

Exercice 21

Simplifier $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cosh\left(\frac{x}{2^k}\right)$ en utilisant $\sinh 2a = 2\sinh a \cosh a$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$ en le considérant comme un nombre dérivé. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 22

Montrer :

$$\forall x \in [0,1],\ \arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$$

Exercice 23

Simplifier :
$\arctan \dfrac{k}{k+1} - \arctan \dfrac{k-1}{k}$.

En déduire une simplification de la somme :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{1}{2\,k^2}$. Déterminer la limite de cette somme quand $n \to \infty$.

Exercice 24

1) Calculer $A = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$.

2) Résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R},\ \arctan(x-3) + \arctan x + \arctan(x+3) = \frac{\pi}{4}$$

Pour cela commencer par étudier les variations de
$f : x \to \arctan(x-3) + \arctan x + \arctan(x+3)$, les limites aux bornes de l'ensemble de définition et utiliser la continuité de f pour justifier que c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer. En déduire que cette équation a une solution unique et la déterminer en utilisant la première question.