FRACTIONS RATIONNELLES. PRIMITIVES.

Exercice 1

Déterminer deux polynômes U et V de $K[X]$ tels que $UX^2 - V(X-1)^3 = 1$. En décomposant U à l'aide de la formule de Taylor, déterminer la décomposition en éléments simples de

$$F = \frac{1}{X^2(X-1)^3}.$$

Exercice 2

Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$F = \frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$$

sur $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 3

On définit

$$u_k = \frac{4k-3}{k(k-2)(k+2)}, \ S_n = \sum_{k=3}^{n} u_k.$$

Déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice 4

Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{p}{1+p^2+p^4} \right).$$

Exercice 5

Décomposer en éléments simples, sur $\mathbb{C}(X)$, les fractions rationnelles suivantes :

$$a)\ F = \frac{10X^3}{(X^2+1)(X^2-4)}, \ b)\ G = \frac{X^2}{(X^2+X+1)^2}.$$

Exercice 6

Soit T_n le polynôme de Tchebychev d'ordre n défini par $T_n(\cos x) = \cos(nx)$, c'est un polynôme de degré n. Quelles sont les racines de T_n ? Décomposer $\dfrac{1}{T_n}$ en éléments simples.

Exercice 7

1) On considère A polynome de degré n a coefficients dans $\mathbb{C}$. Montrer que les pôles de $\frac{A'}{A}$ sont tous simples et que

$$\frac{A'(X)}{A(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - x_i}$$

les $x_i,\ i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ étant les racines de A, comptées avec leur ordre de multiplicité. Calculer

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i - a} \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i - a)^2}$$

où $a \in \mathbb{C}, a \neq x_i$ pour tout i.

2) En utilisant ce qui précède calculer

$$S = \sum_{i=1}^{4} \frac{2x_i^2 + 1}{(x_i^2 - 1)^2}$$

les nombres x_i étant les zéros du polynomes $X^4 - X + 1$.

Exercice 8

Calculer une primitive de

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)(x - 2)^2}, \quad g(x) = \frac{5}{x^2 + x + 1 + i}$$

Exercice 9

Calculer une primitive de

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^4}, \quad g(x) = \frac{x}{1 + x^4}.$$

Exercice 10

Calculer une primitive de

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}, \quad g(x) = \frac{1}{x^3 - 1}.$$

Exercice 11

Calculer les primitives des fonctions

$$f(x) = \frac{1}{\cos x \sin^3 x}, \ g(x) = \frac{1}{2 + \cos x}, \ h(x) = \frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos^2 x}, \ e(x) = \frac{1}{\sin x(1 + 3\cos x)}.$$