GEOMETRIE PLANE

Exercice 1

Soit ABC un triangle non aplati $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

1) Montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.
2) Soit R le rayon de son cercle circonscrit. Montrer que

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}.$$

Exercice 2

Montrer que l'orthocentre H d'un triangle ABC admet les coordonnées barycentriques $\tan\widehat{A}$, $\tan\widehat{B}$, $\tan\widehat{C}$.

Exercice 3

Soit ABC un triangle, on mène par A (resp. B, resp. C) la parallèle à (BC) (resp. à (AC), resp. à (AB)). Ces trois droites se coupent deux à deux en D, E, F. Montrer que les triangles ABC et DEF sont homothétiques. Quelles sont les transformées des hauteurs de ABC dans cette homothétie ? Que peut on démontrer à partir de ce résultat ?

Exercice 4

1) Montrer que l'équation générale d'une droite dans un repère orthonormé peut s'écrire
$p\,\overline{z} - \overline{p}z = h$, $p \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{R}$.
2)Donner sous cette forme l'équation de la droite orthogonale à(BC), $B(b)$, $C(c)$ et passant par le point $A(a)$.

Exercice 5

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé, les trois droites d'équations respectives

$$ax + by + c = 0,\ ax + by = \sqrt{3}(bx - ay),\ ax + by = -\sqrt{3}(bx - ay).$$

Montrer que ce sont les trois cotés d'un triangle équilatéral.

Exercice 6

Soit ABC un triangle du plan. On considère les points P, Q, R situés respectivement sur les droites (BC), (CA), (AB). On considère les homothéties h_1 de centre P et de rapport $\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$ et h_2 de centre Q et de rapport $\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QC}}$. Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie produit. En déduire

$$P, Q, R \text{ sont alignés } \iff \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\,\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\,\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$$

Exercice 7

Applications de Leibniz.
1) Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$ n points du plan et $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ n réels. On définit une application de $\mathcal{P}$ dans P par

$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}.$$

Montrer que f est bijective si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Que représente t-elle dans le cas contraire ?
2) On définit une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$g(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2.$$

Déterminer les lignes de niveau de g en discutant en fonction de la valeur de $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Exercice 8

Dans un triangle ABC on considère I milieu du segment $[BC]$. Une droite variable passant par I coupe (AB) et (AC) respectivement en D et E. Quel est le lieu des points d'intersection des droites (BE) et (CD) ?
Remarque : On pourra considérer le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et remarquer que la droite (DE) n'étant pas parallèle à (AB) ou (AC), elle admet une équation de la forme $y - \frac{1}{2} = k(x - \frac{1}{2})$, $k \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 9

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On considère un cercle Cde centre Ω de coordonnées a, b et de rayon R. Soit $M \in \mathcal{P}$.
1) On mène par M une sécante à C qui coupe le cercle en A et B. Montrer que

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2,\ d = \Omega M.$$

On note $C(M)$ cette constante.
2) Montrer que si la droite (MT) est tangente en T au cercle, $C(M) = MT^2$.
3) Soient x_0, y_0 les coordonnées du point M, on pose $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$, l'équation du cercle étant $f(x,y) = 0$. Montrer que $C(M) = f(x_0, y_0)$.
4) Soient (A,B) et (C,D) deux couples de points déterminant deux droites sécantes en un point P. Montrer que A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PD}.$$

Exercice 10

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On considère les points $A(-1,0)$, $B(2,4)$, $C(3,3)$.
1) Calculer l'aire du triangle ABC. En déduire la distance de A à la droite (BC).
2) Déterminer une équation de la droite (AB). En déduire la longueur de la hauteur issue de C et retrouver l'aire du triangle ABC.

Exercice 11

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soient $A(1,-2)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x+4y-1=0$.
1) Calculer la distance de A à $\mathcal{D}$.
2) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{D}$. En déduire les coordonnées du point H projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$. Retrouver la distance de A à $\mathcal{D}$.

Exercice 12

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2+y^2-2x-4y=0$. Il coupe l'axe des abscisses en O et A et l'axe des ordonnées en O et B. La première bissectrice des axes d'équation $y=x$ recoupe $\mathcal{C}$ en D.
On considère les cercles $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[OA]$, $\mathcal{C}_2$ de diamètre $[OB]$, $\mathcal{C}_3$ de diamètre $[OD]$.
$\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ se recoupent en I_1, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$ se recoupent en I_2, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_1$ se recoupent en I_3. Montrer que I_1, I_2 et I_3 sont alignés.

exercice 13

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Déterminer les droites passant par $A(5,0)$ et tangentes au cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2+y^2-4x-2y-4=0$.

Exercice 14

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soient $A(1,4)$, $B(-4,2)$, $C(3,-1)$ trois points du plan. Déterminer la nature du triangle ABC et donner une équation cartésienne de la hauteur issue de A.

Exercice 15

On appelle Γ l'hyperbole d'équation $xy=1$ dans le repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.
1) Soient A,B,C trois points de Γ. Monter que l'orthocentre H du triangle ABC est sur Γ.
2) Soient (α) et (α') les droites perpendiculaires à (BC) aux points d'intersection de (BC) avec les axes (Ox) et (Oy) respectivement. On définit de même les droites (β) et (β') associées à (AC) et (γ) et (γ') associées à (AB). Montrer que α, β, γ sont concourantes en un point P et que α', β', γ' sont concourantes en un point P'.

Exercice 16

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On considère les droites :
$\mathcal{D} : 2x - 4y + 5 = 0,\ \mathcal{D}' : 3x + y - 4 = 0.$
Déterminer les équations cartésiennes des bissectrices de ces droites.

Exercice 17

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soient A, B, C trois points non alignés du plan.
1) Montrer que pour tout point M du plan on a :
$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BC} = 0.$
2) Déduire de la question précédente que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.