INTEGRALES DOUBLES

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

1)

$$I = \iint_D xye^{x+y}dxdy,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leq x \leq a, 1 \leq y \leq b\}.$$

2)

$$I = \iint_D \frac{y}{x^2+1},\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}.$$

3)

$$I = \iint_D x(y-e^y)dxdy,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}.$$

4)

$$I = \iint_D \frac{1}{x+y+1}dxdy,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}.$$

Exercice 2

Soit $X > 0$ et :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq X^2\}$$

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq X, o \leq y \leq X\}.$$

1) Calculer :

$$I(X) = \iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

2) On pose :

$$J(X) = \iint_\Delta e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

Déterminer un encadrement de $J(X)$ à l'aide de $I(X)$.

3) Montrer que la fonction $X \to \int_0^X e^{-x^2}dx$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.

Exercice 3

Déterminer l'aire du domaine limité par les paraboles d'équations$y^2 = 3-x$ et $y^2 = 3-3x$ et $x \geq 0$.

Exercice 4

Déterminer l'aire du domaine extérieur au cercle d'équation polaire $r = a$ et à l'intérieur de la cardioïde d'équation $r = a(1+\cos\theta)$.

Exercice 5

Soit $b \in \mathbb{R},\ b \geq 1$. Calculer :

$$\int_1^{\sqrt{b}} \left(\int_{\sqrt{x}}^{x} \cos\frac{\pi x}{2y}dy\right)dx + \int_{\sqrt{b}}^{b} \left(\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{b}} \cos\frac{\pi x}{2y}dy\right)dx.$$

Exercice 6

a) Calculer l'intégrale

$$I = \iint_D \frac{2xy}{x^2+y^2} dxdy,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x \geq 0,\ x^2+y^2-2y \leq 0\}$$

en passant en coordonnées polaires .

b) Calculer l'intégrale

$$I = \iint_D exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$$

en faisant le changement de variables : $u = x+y,\ v = x-y$.

Exercice 7

Soit T le triangle ouvert $x > 0, y > 0, x+y < a$ avec $a > 0$. Calculer l'intégrale

$$\iint_T \frac{3y}{\sqrt{(1+(x+y)^3}} dxdy$$

à l'aide d'un changement de variable.

Exercice 8

a) Soit V le tétraèdre ouvert $x > 0, y > 0, z > 0, x+y+z < 1$. Calculer l'intégrale

$$\iiint_V xyz(1-x-y-z)dxdydz$$

en effectuant le changement de variable $X = x+y+z, XY = y+z, XYZ = z$.
b) Calculer l'intégrale

$$\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz$$

où $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$.