INTEGRATION

Exercice 1

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$.

$$I_n = \int_a^b f(x) \cos nx dx.$$

1) Montrer que si f est une fonction en escalier sur $[a, b]$ on a :

$$\lim_{n \to \infty} I_n = 0.$$

2) En approximant une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier montrer que $\lim_{n \to \infty} I_n = 0$ pour une fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$.

Exercice 2

Montrer que :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x^n \ln(1 + x^2) dx = 0.$$

Exercice 3

Soient f et g des fonctions continues, positives sur $[0, 1]$. On suppose que $fg \geq 1$. Montrer que :

$$\left(\int_0^1 f \right) \left(\int_0^1 g \right) \geq 1.$$

Exercice 4

Soit $f \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leq f'(x) \leq 1$. Montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ \left(\int_0^x f \right)^2 \geq \int_0^x f^3.$$

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_{-1}^2 |x|\, x dx,\ J = \int_{-1}^1 |x|\, x dx.$$

Exercice 6

On considère la fonction définie par :

$$G(x)=\int_0^{\frac{1+\tan x}{2}} \frac{1}{1-2t+2t^2}\,dt,\ \ x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[.$$

Montrer que G est dérivable sur D et calculer sa dérivée.
En déduire G et

$$\int_0^1 \frac{1}{1-2t+2t^2}\,dt.$$

Exercice 7

On considère une fonction $\phi\in C^1([a,b],\mathbb{R})$ positive décroissante et $f\in C^0([a,b],\mathbb{R})$.
On pose

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt\ ,\ m=\inf_{x\in[a,b]} F(x)\ ,\ M=\sup_{x\in[a,b]} F(x)$$

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$m\phi(a)\leq\int_a^b f(t)\phi(t)dt\leq M\phi(a)$$

En déduire qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $\int_a^b f(t)\phi(t)dt=\phi(a)\int_a^c f(t)dt$

Exercice 8

On considère une fonction $f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ f(a+b-x)=f(x)$$

1) Exprimer $\int_a^b xf(x)dx$ en fonction de $\int_a^b f(x)dx$.
2) Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin x}dx$$

Exercice 9

On considère une fonction $g\in C^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que $g(1)=g'(1)=0$. Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_0^1 t^n g(t)dt$$

Exercice 10

1) On considère une fonction $f\in C^0([a,b],\mathbb{R})$ et on définit $f^+(x)=\sup\{f(x),0\}$, $g^+(x)=\sup\{-f(x),0)$. Ecrire $f\ et\ |f|$ en fonction de $f^+\ et\ f^-$.
2) Montrer que si

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right|=\int_a^b |f(t)|dt\ (1)$$

f garde un signe constant .
3) On considère $f\in C^0([a,b],\mathbb{C})$. Montrer que si (1) est vérifié f est nulle ou garde un argument constant .

Exercice 11

1) Déterminer une fonction $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1$$

2) Déterminer toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \int_0^x f(t)dt = \frac{x}{3}(f(x) + 2f(0)).$$

Exercice 12

Déterminer les limites des suites :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}, \ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}, \ w_n = \frac{1}{n^4} \prod_{k=1}^{2n} (n^2 + k^2)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 13

Déterminer les limites des suites :

1)

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots \sin\frac{n\pi}{n}\right).$$

2)

$$v_n = n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots \frac{1}{(n+n)^2}\right).$$

3)

$$w_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}.$$

4)

$$t_n = \sqrt[n]{\left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2\right) \cdots \left(1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right)}.$$

Exercice 14

Soient f une fonction continue sur $[0, 1]$ et g une fonction continue et convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$g\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 g \circ f.$$

Exercice 15

Soit
$$I(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\, dt.$$
Déterminer l'ensemble de définition de I. Calculer cette intégrale à l'aide des sommes de Riemann. On pourra utiliser :
$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right) = x^n - 1.$$

Exercice 16

Déterminer la limite de la suite
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin(\frac{k}{n}).$$
En déduire la limite de la suite
$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

Exercice 17

Soient deux fonctions f et g définies par :
$$f(x) = \int_1^x \frac{1+\sin t}{t^2}\, dt,\ g(x) = \int_1^x \frac{\cos t}{t}\, dt,\ x \in]0, +\infty[.$$
Montrer que f et g ont une limite réelle en $+\infty$. On ne demande pas de calculer cette limite.

Exercice 18

Soit f une fonction réelle continue sur $[0, 1]$. On définit la fonction ϕ par :
$$\phi(x) = \int_0^1 f(t)\sin(xt) dt,\ x \in \mathbb{R}.$$
Montrer que ϕ est lipschitzienne et qu'elle est dérivable, de dérivée
$$\phi'(x) = \int_0^1 tf(t)\cos(xt) dt.$$

Exercice 19

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ et calculer sa dérivée.
$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt.$$

Exercice 20

Déterminer une primitive de $f : x \to \sin(\ln(x))$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 21

Existe t-il une fonction f continue sur $[0,1]$telle que :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 f^2(x^2)\,dx\ ?$$

Exercice 22

1) On considère une fonction $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ strictement croissante avec $f(0)=0$. On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x).$$

La fonction F est elle dérivable ? En déduire une égalité.

Exercice 23

On considère deux fonctions f et g continues et strictement positives sur [a,b] . On pose

$$m = \inf_{x\in[a,b]} \frac{f(x)}{g(x)}\ ,\ M = \sup_{x\in[a,b]} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Montrer que

$$\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$

Montrer que l'on a l'égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles .

Exercice 24

Calculer les primitives suivantes :

1)

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx \quad \text{On posera } x = 2\sin^2 u.$$

2)

$$\int \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}dx \quad \text{On posera } x^2 = \cos u.$$

Exercice 25

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de

$$t \to \frac{1}{2+\cos t} \quad \text{On posera } u = \tan\frac{t}{2}.$$

Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}dt.$$