APPLICATIONS AFFINES DU PLAN ET DE L'ESPACE

Exercice 1

Etudier l'application f du plan affine définie analytiquement, dans un repère orthnormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, par :

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y + 3 - \sqrt{3}) \\ y' &= \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y - 1 + \sqrt{3}) \end{cases}$$

Exercice 2

Etudier l'application f de l'espace affine euclidien de dimension 3 définie analytiquement, dans un repère orthnormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, par :

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z + 2) \\ y' &= \frac{1}{3}(2x - y + 2z + 8) \\ z' &= \frac{1}{3}(2x + 2y - z + 8) \end{cases}$$

Exercice 3

Soient E un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, $\mathcal{P}$ un plan de E de direction P.
Montrer que la composée d'une réflexion g de plan $\mathcal{P}$ et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{v} \in P^{\perp}$ est une réflexion.
En déduire que la composée f d'une réflexion de plan $\mathcal{P}$ et d'une translation quelconque est la composée commutative d'une réflexion et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u} \in P$.
Déterminer l'application $f : E \to E$ définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{9}(x - 8y - 4z + 1) \\ y' &= \frac{1}{9}(-8x + y - 4z + 2) \\ z' &= \frac{1}{9}(-4x - 4y + 7z + 3) \end{cases}$$

Exercice 4

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Déterminer l'application affine $f : E \to E$ définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{9}(-7x - 4y - 4z) - 6 \\ y' &= \frac{1}{9}(4x - 8y + z) + 7 \\ z' &= \frac{1}{9}(-4x - y + 8z) - 10 \end{cases}$$

Exercice 5

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y + z = 1$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équations $x = 2z + 1,\ y = z - 1$. Déterminer l'image de $\mathcal{P}$ par le retournement d'axe $\mathcal{D}$.

Exercice 6

1) Le plan euclidien étant rapporté à un repère orthonormal direct, Déterminer toutes les isométries conservant un triangle équilatéral ABC.
2) Montrer que l'ensemble de ces isométries a une structure de groupe pour la loi de composition des applications. Donner la table de pythagore de ce groupe.

Exercice 7

Le plan euclidien étant rapporté à un repère orthonormal direct, on considère le triangle ABC, orienté dans le sens indirect. On appelle C le cercle inscrit dans ce triangle et A', B' et C' les points de tangence respectifs de ce cercle et des cotés $(AC), (AB)$ et (BC).
On appelle R_A la rotation de centre A et d'angle $\hat{A}$ orienté dans le sens direct. On définit de la même manière les rotations R_B et R_C. Déterminer $R_C \circ R_B \circ R_A(A')$. En déduire la nature de $R_C \circ R_B \circ R_A$.
Déterminer géométriquement le centre de la rotation $R_B \circ R_A$.

Exercice 8

Le plan euclidien étant rapporté à un repère orthonormal direct. On considère l' application affine f définie par les formules analytiques :

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5} \\ y' &= \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Montrer que $f \circ f = t_{\vec{v}}$. Déterminer les points invariants de $f \circ t_{-\frac{\vec{v}}{2}}$. En déduire la nature de f.

Exercice 9

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application affine f définie par :

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{1}{3}(2x - y - z + 1) \\ y' &= \frac{1}{3}(-x + 2y - z + 1) \\ z' &= \frac{1}{3}(-x - y + 2z + 1) \end{aligned} \right.$$

Montrer que f est une projection et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 10

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application affine f définie par :

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= -x + 2y - 2z - 2 \\ y' &= 3y - 4z - 4 \\ z' &= 2y - 3z - 4 \end{aligned} \right.$$

Montrer que f est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.