MATRICES

Dans tous les exercices $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 exercice

Dans chacun des cas suivants trouver une base du noyau et de l'image des applications linéaires canoniquement associées aux matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans le deuxième cas donner le rang de la matrice et une équation de l'image.

2 exercice

$E = \mathbb{R}^3$ calculer la matrice dans la base canonique de la composée de l'homothétie de rapport 5 et de la projection sur le plan d'équation $x + y + 2z = 0$ parallèlement à la droite engendrée par $(1, 2, 1)$.

3 exercice

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x - y, x, 2x - 3y) \in \mathbb{R}^3$ et $g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x - y, x - z, y - z, z) \in \mathbb{R}^4$, déterminer gof en utilisant les matrices.

4 exercice

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$. Montrer que E est une $\mathbb{R}$ algèbre et en déterminer une base.

5 exercice

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, $A = (a_{p,q})$ et $B = (b_{p,q})$les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définies par $a_{p,q} = x^{(p-1)(q-1)}$ et $b_{p,q} = x^{(p-1)(1-q)}$. Calculer $A^2, B^2, AB, BA, A^{-1}, B^{-1}$.

6 exercice

1) Dans $\mathcal{M}_n(K)$ calculer $E_{i,j}E_{k,l}$.
2) Déterminer les matrices qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(K)$.
3) Déterminer les matrices qui commutent avec toutes les matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(K)$.
4) Déterminer les matrices qui commutent avec toutes les matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(K)$.

7 exercice

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculer le rang de A^n.
2) Calculer $(A - I)(I + A + A^2 + A^3)$. La matrice $B = A - I$ est-elle inversible ? Si oui déterminer B^{-1}.

8 exercice

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, si oui calculer leur inverse.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

9 exercice

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui vérifie $\forall i \in \{1,..,n\}, \sum_{i \neq j} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$. Montrer que A est inversible.

10 exercice

Produit de deux matrices par blocs :
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, soient n_1, n_2, p_1, p_2 des entiers non nuls tels que $n = n_1 + n_2$ et $p = p_1 + p_2$. Considérons la décomposition de A par blocs schématisée par $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$ où $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,p_j}(K)$
1) Soit $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ avec $q = q_1 + q_2$ décomposée en blocs sous la forme $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$ où $B_{i,j} \in \mathcal{M}_{p_i,q_j}(K)$.
Calculer AB.
2) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in GL_p(K)$, $C \in GL_q(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

11 exercice

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $A^2 = A$. Montrer que $B = 2A - I$ est inversible et calculer son inverse.
2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle qu'il existe des coefficients a et b tels que $A^2 + aA + I = 0$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse .

12 exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que tous ses éléments soient égaux à 1 sauf ceux de la diagonale qui sont nuls. Etudier l'existence et le calcul de A^p avec $p \in \mathbb{Z}$.

13 exercice

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $u : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to PM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
1) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2) Trouver la matrice de u dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
3) Déterminer l'image et le noyau de u.

14 exercice

On considère $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ensemble des matrices carrées d'ordre 3 sur $\mathbb{R}$ et E le sous ensemble formé des matrices dont la somme des éléments de chacune des lignes et de chacune des colonnes est la même. Si $A \in E$, on note d(A) cette valeur commune.
1) Montrer que E est un espace vectoriel et un anneau unitaire.
2) On considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

montrer que $A \in E \Leftrightarrow AJ = JA = J\,d(A)$.
3) Montrer que si A est inversible $A^{-1} \in E$ et calculer $d(A^{-1})$.
4) On appelle F le sous espace de E formé des matrices A telles que $d(A) = 0$ et G l'ensemble des matrices λJ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $E = F \oplus G$. Déterminer une base de F. Quelle est la dimension de E ?

15 Exercice

On considère

$$u : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X]$$

où $\mathbb{C}_n[X]$ est l'ensemble des polynomes de $d^0 \leq n$ défini par

$$u(P) = (X-1)P'(X) + aP(1) \; avec \; a \in \mathbb{C}$$

Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer la matrice de u dans la base

$$B = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

16 Exercice

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^n \\ 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que
- $A^p = I + pJ + C_{p+1}^2 J^2 + \cdots C_{p+k-1}^k J^k + \cdots + C_{p+n-1}^n J^n$, $p \in \mathbb{N}$.
- $A^{-1} = I - J$

17 Exercice

Déterminer la matrice inverse de

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

18 Exercice

Soient $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer $(A+I)^3$ et en déduire A^n , $n \in \mathbb{N}$.

19 Exercice

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n, $n \in \mathbb{Z}$. On pourra utiliser $A = B + I_3$.

20 Exercice

Calculer les puissances entières de

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On pourra écrire $A = -3I_4 + J$.

21 Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 77 & -60 \\ 100 & -78 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

1) Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2) Déterminer les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= 77u_n - 60v_n \\ v_{n+1} &= 100u_n - 78v_n \end{cases}$$

22 Exercice

On considère E $= \mathbb{R}_3[X]$ et $A = X^4 - 1, B = X^4 - X$. L'application $\phi : E \to E$ est définie par : $\forall P \in E, \phi(P)$ est le reste de la division euclidienne de AP par B. Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique. Montrer que P est dans le noyau de ϕ si et seulement si $X^3 + X^2 + X$ divise P. Déterminer l'image de ϕ.

23 Exercice

Déterminer l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_1^1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ C_2^2 & C_2^1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ C_n^n & C_n^{n-1} & C_n^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

On pourra étudier l'effet de la transposée de cette matrice sur la base $\{1, X, X^2, \cdots, X^n\}$ de l'espace vectoriel des polynomes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

24 Exercice

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

et f l'endomorphisme associé à A dans la bse canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
1) Déterminer le noyau de f, celui de $f + Id_{\mathbb{R}^3}$ et celui de $f - 5Id_{\mathbb{R}^3}$.
2) Déterminer un base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale. En déduire A^3.