POLYNOMES

Exercice 1

Quels sont les polynômes de $K[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$?

Exercice 2

Déterminer les polynômes non constants divisibles par leurs polynômes dérivés.

Exercice 3

1) Soient A et B deux polynômes premiers entre eux. Montrer qu'il existe un couple unique (U, V) de polynômes tels que :

$$AU + BV = 1,\ deg(U) < deg(B),\ deg(V) < deg(A).$$

2) Montrer que $X^3 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, en déduire que :

$$E = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}, (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3\}$$

est un corps.

Exercice 4

Factoriser $P = X^5 - 4X^4 + 9X^3 - 21X^2 + 20X - 5 \in K[X]$ sachant qu'il a deux racines de produit égal à 5.

Exercice 5

Soit $P = X^3 + 3X - 12i$.Calculer $S_7 = x_1^7 + x_2^7 + x_3^7$ où x_1, x_2, x_3 sont les racines de P.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$x^7 - 5x^6 + 8x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Exercice 7

Etant donné $(m, n, p) \in \mathbb{N}^3$, montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$.

Exercice 8

Montrer que $A = X^4 + X^2 - 2X + 1$ et $B = X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux et déterminer une relation de Bezout entre A et B.

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}$, factoriser le polynôme :

$$P = 1 + \frac{X}{1} + \frac{X(X+1)}{2!} + \cdots + \frac{X(X+1)\cdots(X+n-1)}{n!}.$$

Exercice 10

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X \sin\theta + \cos\theta)^n$ par X^2+1.

Exercice 11

Soit $P = 2X^5 - 4X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 5X - 4$. En utilisant la division euclidienne de P par un polynôme s'annulant en $1+\sqrt{2}$, calculer la valeur de P en $1+\sqrt{2}$.

Exercice 12

1) Montrer que les polynomes de $\mathbb{R}[X]$
$(1-X)^n, X(1-X)^{n-1}, \ldots, X^k(1-X)^{n-k}, \ldots, X^n$ forment une base de l'espace vectoriel de dimension n+1 des polynomes de degré $\leq n$ à coéfficients dans $\mathbb{R}$.
2) Déterminer les coordonnées par rapport à cette base du polynome dérivée n-ième de $P = X^n(1-X)^n$.
3) En déduire l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$$

.

Exercice 13

On pose

$$P = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n \text{ et } Q = X^n - |a_1|X^{n-1} - \cdots - |a_{n-1}|X - |a_n|.$$

On suppose $a_n \neq 0$. Montrer que Q admet dans $\mathbb{R}$ une seule racine positive α_0 et que les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont de module inférieur à α_0.

Exercice 14

1) On considère un polynome A dont les coefficients sont des entiers relatifs premiers dans leur ensemble. Montrer que si x=$\frac{p}{q}$ (fraction irréductible de $\mathbb{Q}$) est racine de A p divise a_0 et q divise a_n où $A = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$.
2) Déterminer les racines rationnelles de $A = 3X^3 + 4X^2 + 2X - 4$.
3) Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles du polynome précédent
- dans $\mathbb{Q}[X]$.
- dans $\mathbb{R}[X]$.
- dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 15

On considère le polynome $Q = 1 + 2X + 3X^2 + \cdots + nX^{n-1}$.
1) Calculer $Q(\omega)$, en fonction de ω, racine n-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$.
On remarquera que Q est le polynôme dérivé de $P = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n$.
2) On appelle $\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_{n-1}$ les n racines n-ièmes de l'unité. Calculer le produit

$$\prod_{i=0}^{n-1} Q(\omega_i)$$

On remarquera que les racines n-ièmes de l'unité différentes de 1 sont toutes les racines du polynôme $\frac{X^n-1}{X-1}$.

exercice 16

On considère le polynôme :

$$X^4 + pX^2 + qX + r.$$

Calculer en fonction de p, q, r les sommes :

$$S_1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4},\ S_2 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2}.$$

Exercice 17

Déterminer tous les polynômes P tels que :

$$P(2) = 6,\ P'(2) = 1,\ P''(2) = 4, \text{ et } \forall n \geq 3, P^{(n)}(2) = 0.$$

Exercice 18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1$ par $(X+1)^2$.

Exercice 19

1) Calculer le pgcd des deux polynômes :

$$P = X^5 - 4X^4 + 6X^3 - 6X^2 + 5X - 2,\ Q = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1.$$

2) Calculer le pgcd de :

$$X^n - 1 \text{ et } X^m - 1,\ (n,m) \in \mathbb{N}^{*2}$$

Exercice 20

Décomposer les polynômes suivants en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

- $X^4 + X^2 + 1$.
- $X^8 + X^4 + 1$.
- $X^6 + 1$.

Exercice 21

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le polynôme $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ admet une racine multiple.