PROBABILITE

Exercice 1

Une urne contient r boules blanches et s boules noires. On extrait simultanément, au hasard, n boules, $1 \leq n \leq r+s$ et on s'intéresse au nombre de boules blanches tirées.
1) Comment modéliser cette expérience ? (Choix de l'ensemble fondamental Ω et de la probabilité $I\!\!P$).
2) Quel est en fonction de r, s, et n, l'ensemble $\mathcal{V}$ des valeurs possibles prises par le nombre de boules blanches tirées ?
3) On note A_k l'évènement "Parmi les n boules tirées figurent k boules blanches". Calculer $I\!\!P(A_k)$, $k \in \mathcal{V}$.
4) Quelle relation obtient on sur les coefficients binomiaux ?

Exercice 2

Le jeu du Loto consiste à deviner les 5 entiers qui vont être tirés au hasard parmi les entiers $\{1, 2, \cdots, 49\}$ et un numéro chance tiré au hasard parmi les entiers $[\![1, 10]\!]$
1) Comment modéliser le tirage de 5 entiers parmi les 49 premiers entiers naturels non nuls ?
2) Le joueur propose un tirage. On considère les évènements suivant :
— $A_k =$ "avoir deviner exactement k bons numéros", $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
— $P =$"perdre"="avoir deviné 0, 1 bon numéro".
— $G =$"gagner"="avoir au moins 2 bons numéros".
Calculer la probabilité de ces évenements.
Calculer la probabilité d'avoir les cinq bons numéros et le numéro chance.

Exercice 3

On dispose de 10 cartes numérotées de 1 à 10. On tire successivement, au hasard, chacune des 10 cartes. Modéliser cette expérience. On appelle A_k l'évènement "la kième carte tirée porte le numéro k", $k \in \{0, 1, \cdots, 10\}$.
Calculer la probabilité de A_k.
Calculer $I\!\!P(A_i \cap A_j)$, $i \neq j$, puis $I\!\!P(\overline{A_i} \cap A_j)$ et $I\!\!P(\overline{A_i} \cap \overline{A_j})$.

Exercice 4

Une urne contient $n \in I\!\!N^*$ boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard. $p_1, p_2, \cdots, p_r$ étant les diviseurs premiers de n, on note A_{p_i} l'évenement le numéro porté par la boule tirée est divisible par p_i.
1) Calculer $I\!\!P(A_{p_i})$, $1 \leq i \leq r$. Montrer que les évènements A_{p_i} sont indépendants dans leur ensemble.
2) Calculer la probabilité de l'évènement $A =$ "le numéro porté par la boule tirée est premier avec n" (il n'est divisible par aucun p_i). En déduire le nombre $\phi(n)$ des entiers plus petits que n et premiers avec n (la fonction $\phi(n)$ est appelée fonction d'Euler et joue un rôle important en arithmétique).

Exercice 5

Une chaine de fabrication produit un type de composant. En sortie de chaine le composant peut posséder deux type de défauts. Ces deux types apparaissent de façon indépendante.On choisit un composant au hasard et on considère les évènements suivants :
A :" Le composant présente un défaut du premier type "
B :" Le composant présente un défaut du second type "
D :" Le composant est défectueux " = " Le composant a au moins un défaut "
On sait de plus que $I\!\!P(\text{A}) = 0{,}05$ et $I\!\!P(\text{B}) = 0{,}1$.

1) Calculer $I\!P(\overline{D})$ probabilité que le composant soit non défectueux.
2) Calculer la probabilité qu'il ait simultanément les deux types de défauts.
3) Calculer la probabilité qu'il possède un seul défaut.

Exercice 6

On dispose de 7 dés à 6 faces. On numérote ces dés de 1 à 7 de telle sorte que le dé numéro i a $i-1$ faces noires et $7-i$ faces blanches.
On se propose dans un premier temps de choisir un de ces dés. A cette fin on lance un huitième dé et on regarde le résultat :
- Si ce résultat est i $(2 \leq i \leq 6)$ on choisit le dé numéro i.
- Si ce résultat est 1 on lance une deuxième fois le dé.
Le dé choisi sera alors le dé numéro 1 si le second résultat est 1, 2 ou 3 et le dé numéro 7 si le second résultat est 4, 5 ou 6.
Pour $1 \leq i \leq 7$, on note D_i l'évènement "*le dé n^0 i est choisi* " et A l'évènement " *le premier jet du huitième dé a donné 1* ".
1)
a) Quelle est la valeur de $I\!P(D_i)$ pour $2 \leq i \leq 6$.
b) Quelle est la valeur de $I\!P(D_i|A)$ pour $i=1$ et $i=7$. En déduire $I\!P(D_1)$ et $I\!P(D_7)$.
Après avoir sélectionné un dé on le lance plusieurs fois et on s'intéresse aux évenements :
N_k : "*On a obtenu une face noire au k-ième lancer du dé sélectionné* " $(k \geq 1)$.
$S_n = \cap_{k=1}^{n} N_k$, $n \geq 1$.
On admettra que

$$I\!P(S_n|D_i) = \prod_{k=1}^{n} P(N_k|D_i) \text{ , } n \geq 1 \text{ et } 1 \leq i \leq 7$$

2) a) Que vaut $I\!P(N_k|D_i)$?
b) Montrer que $I\!P(N_k) = 1/2$.
3) a) Calculer $I\!P(S_2)$. Les évènements N_1 et N_2 sont-ils indépendants ?
b) Calculer $I\!P(N_2|N_1)$.

Exercice 7

Une urne contient cinq boules blanches, quatre boules noires et trois boules bleues.

1) On tire simultanément trois boules de l'urne.
Quelle est la probabilté d'obtenir trois boules de la même couleur ?
Quelle est la probabilté d'obtenir une boule de chaque couleur ?

2) On tire successivement trois boules de l'urne.
Quelle est la probabilté d'obtenir trois boules de la même couleur ?
Quelle est la probabilté d'obtenir une boule de chaque couleur ?

3) On tire trois boules de l'urne, successivement, sans remise.
Quelle est la probabilté d'obtenir trois boules de la même couleur ?
Quelle est la probabilté d'obtenir une boule de chaque couleur ?
Quelle est la probabilté que la première boule blanche soit tirée au troisième tirage ?
Quelle est la probabilté que la deuxième boule blanche tirée le soit au troisième tirage ?

Exercice 8

Formule du crible de Poincarré.

Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$ n évènements d'un espace probabilisé $(\Omega,\ I\!P)$.
Montrer que :

$$I\!P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} I\!P\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\right)$$

Exercice 9

On lance deux dés équilibrés et on considère les évènements A="Le premier dé donne un nombre pair", B="Le second dé donne un nombre pair" et C="Les deux dés donnent des nombres de même parité".

Montrer que les évènements A, B, C sont deux à deux indépendants mais que A et $B \cap C$ de même que A et $B \cup C$ ne sont pas indépendants.

Exercice 10

Un tiroir contient douze paires de chaussettes (propres et non trouées) toutes différentes. On prend quatre chaussettes, quelle est la probabilité d'obtenir :

1) Deux paires complètes.
2) au moins une paire.
3) Une paire et une seule.

Exercice 11

On lance n fois une pièce de monnaie. la probabilité d'obtenir pile à chaque lancer étant $p \in]0,1[$.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir le premier pile au n-ième lancer ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir le k-ième pile au n-ième lancer, $k \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 12

Un laboratoire fabrique un alcootest et les essais montrent que :

— 2% des personnes controlées sont en état d'ébriété.
— 95 fois sur 100 l'alcootest a donné un résultat positif alors que la personne était en état d'ébriété.
— 98 fois sur 100 l'alcootest a donné un résultat négatif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété.

1) On teste l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est positif, quelle est la probabilté que cette personne soit en état d'ébriété ?
2) On teste l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est négatif, quelle est la probabilté que cette personne soit en fait en état d'ébriété ?
3) Déterminer la probabilité que le résultat donné par l'appareil soit faux .

Exercice 13

Un canal de transmission transmets des bits de la manière suivante : il transmet fidèlement un bit avec la probabilité p, $0 < p < 1$ et de façon erronnée avec la probabilité $1-p$. Un bit traverse n canaux de ce type successivement, chaque canal fonctionnant de façon indépendante des autres. On note $x_0 \in \{0,1\}$ le bit initial. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note x_n le bit après la traversée de n canaux et p_n la probbilité de l'évènement A_n : "$x_n = x_0''$.

1) Déterminer une relation entre p_n et p_{n-1} pour $n \geq 1$.
2) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et de p.
3) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

Exercice 14

Une urne contient $r \geq 1$ boules rouges et $b \geq 1$ boules blanches. On effectue des tirages successifs d'une boule, en remettant après tirage la boule dans l'urne avec en plus c boules de la meme couleur. Pour tout $n \geq 1$ on appelle R_n (respectivement B_n l'évènement "la n-ième boule tirée est rouge" (respectivement blanche).

1) Calculer $I\!P(R_1|R_2)$, simplifier l'expression. Que remarque t-on ?
2) a) On note $p_n(r,b)$ la probabilité d'avoir une boule rouge au n-ième tirage quand l'urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches.. Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ p_n(r,b) = \frac{r}{r+b}\,p_{n-1}(r+c,b) + \frac{b}{r+b}\,p_{n-1}(r,b+c).$$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I\!P(R_n) = \dfrac{r}{r+b}$.

Exercice 15

Une urne contient n boules dont b blanches et r rouges indiscernables au toucher, où $r \geq 4$. On tire quatre boules successivement et sans remise de cette urne.

1) Quelle est la probabilité que les quatre boules tirées soient rouges ?
2) Soit $k \in [\![1, r+1]\!]$. Quelle est la probabilité qu'une boule rouge apparaisse pour la première fois au k-ième tirage ?

Exercice 16

Une compagnie d'assurance estime que ses clients se divisent en deux catégories : les clients enclins aux accidents, qui représentent 20% des assurés et ceux qui ont peu d'accidents.
Pour la première catégorie, la probabilité d'avoir au moins un accident par an est 0,5, pour la deuxième catégorie la probabilité est 0,1.

Quelle est la probabilité qu'un nouvel assuré soit victime d'un accident pendant l'année qui suit la signature de son contrat ?