SERIES NUMERIQUES

Exercice 1

Etudier la convergence des séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ suivantes et en cas de convergence déterminer leur somme :

1) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - 1$ 2) $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ 3) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

4) $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 2

Etudier la convergence des séries de termes généraux suivant :

1) $u_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}},\ n \geq 1$ 2) $u_n = \dfrac{\ln n}{2^n},\ n \geq 1$

3) $u_n = n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n}}\ n \geq 1$ 4) $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}}{2^n+\sqrt{n}}$

Exercice 3

Etudier la convergence des séries suivantes et le cas échéant calculer leur somme lorsqu'elle existe.

1) $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^3-n}$

2) $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$

3) $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{(3+(-1)^n)^n}$

Exercice 4

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Etudier la convergence de la série de terme général :

$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$. Calculer la somme de la série lorsqu'elle converge.

Exercice 5

Etudier la nature des séries de terme général u_n.

$$1)\ u_n = \frac{n^2-5}{\sqrt{n^7+(-1)^n}}\sin(n^2) \quad 2)\ \ u_n = \cos(1/n^2)$$

$$3)\ u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}} \quad 4)\ u_n = \sin(\pi n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right))$$

Exercice 6

Déterminer les réels $a,\ b,\ c$ pour que la série

$$\sum_{n\geq 1}(\frac{a}{3n-2}+\frac{b}{3n-1}+\frac{c}{3n})$$

soit convergente.

Exercice 7

Montrer que la série

$$\sum_{n\geq 3}\frac{(2n-1)}{n(n^2-4)}$$

converge et calculer sa somme.

Exercice 8

Montrer que les deux séries sont convergentes et calculer leur somme.

$$\sum_{n\geq 2}\ln(1-\frac{1}{n^2})\ ,\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Exercice 9

Déterminer la nature des séries suivantes

$$\sum \sin(\pi n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right))\ ,\ \sum \exp(-\sqrt{n})$$

$$\sum \frac{\cos n}{n^2+\ln n}\ ,\ \sum \frac{(-1)^n}{n+\cos n}$$

Exercice 10

Vérifier la suite d'égalités

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}=-\int_0^1\frac{1-(-t)^n}{1+t}=-\ln 2+\frac{(-1)^n}{2(n+1)}+O(\frac{1}{n^2}).$$

Déduire de ces égalités la nature de la série de terme général

$$u_n=2-\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\right).$$

Exercice 11

Etudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général

$$u_n=\frac{2n+1}{n^2(n+2)^2}\ ,\ \text{en utilisant}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi}{6}.$$

Exercice 12

On considère la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}), sommes partielles d'ordre pair et impair de la série, sont adjacentes.

La série est elle convergente ? Est elle absolument convergente ?

Exercice 13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n = -\frac{4}{n}$ si n est multiple de 5 et $u_n = \frac{1}{n}$ sinon.

Calculer $\sum_{k=1}^{5n} u_k$. En déduire que $\sum u_k$ converge et calculer sa somme.

Exercice 14

Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. on définit $u_n = \ln\left(\cos \frac{x}{2^n}\right)$, $n \geq 1$. Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et calculer sa somme. On pourra utiliser $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Exercice 15

Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n}$ diverge. A l'aide d'une comparaison série intégrale (la fonction vérifie t-elle les conditions d'application ?) déterminer un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$

Exercice 16

1) Soit (a_n) une suite strictement positive, décroissante et convergeant vers 0. En étudiant les sommes partielles de rang pair et impair montrer que la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.

2) Pour quelles valeurs de α les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ convergent t-elles ? Pour quelles valeurs de α sont elles absolument convergentes ?

Exercice 17

1) Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ que vaut sa somme ? Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

2) Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!}$.

Exercice 18

Etudier la nature des séries de termes généraux $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ et $v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt$. Pour l'étude de $\sum v_n$ utiliser l'exercice 16.