SUITES REELLES OU COMPLEXES

Exercice 1

1) Soit (u_n) une suite rélle convergente de limite l, montrer que la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} u_p$$

converge également vers l. La réciproque est elle vraie ? La suite (v_n) est appelée moyenne de Césaro de la suite (u_n).
2) Soit (u_n) une suite telle que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers l. Montrer que la suite $(\frac{u_n}{n})$ converge également vers l. La réciproque est elle vraie ?
3) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge vers l. Montrer que la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge également vers l. La réciproque est elle vraie ?
4) Déterminer les limites éventuelles des suites :

$$u_n = \sqrt[n]{n},\ v_n = \sqrt[n]{C_{2n}^{n}},\ w_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

Exercice 2

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) = E(x).$$

2) En déduire :

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{k=0}^{p} E\left(\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right),\ n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles définies par $u_0 = 0,\ v_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{7 - v_n},\ v_{n+1} = \sqrt{7 + u_n}.$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n,\ v_n \in [0, 7]$.
2) Quelles sont les limites éventuelles a de (u_n) et b de (v_n) ?
Déterminer λ et μ dans $]0, 1[$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - a| \leq \lambda|v_n - b|,\ |v_{n+1} - b| \leq \mu|u_n - a|.$$

Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Exercice 4

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par :

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx).$$

Montrer que

$$\frac{x}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{x}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k.$$

En déduire $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 5

Déterminer les limites éventuelles des suites :

1) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$.

2) $u_n = \dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt{n^2-1}}$.

3) $u_n = 3^n - n^2 2^n$.

4) $u_n = \dfrac{2^{2n}+n3^n}{2^{2n}-n3^n}$.

5) $u_n = \dfrac{n^2 - n\ln n}{n^2+n(\ln n)^2}$.

Exercice 6

1) Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$x \to \phi(x) = \pi + \frac{1}{3}\sin(x).$$

Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad |\phi(x) - \phi(y)| \leq \frac{1}{3}|x-y|.$$

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad u_n = \phi(u_{n-1})$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad |u_{n+1} - \pi| \leq \frac{1}{3}|u_n - \pi|.$$

En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence

$$u_0 = 1 \ , \ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{4}{u_n}) \ , \ n \geq 0.$$

1) Montrer que tous les termes de cette suite sont positifs. Déterminer les limites éventuelles de cette suite.

2) Montrer que cette suite est convergente et déterminer sa limite quand $n \to \infty$.

Exercice 8

Montrer que la suite définie par :

$$u_n = \prod_{k=0}^{n}(1+e^{-k})$$

est convergente. (On ne demande pas de calculer sa limite).

Exercice 9

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a, \ v_0 = b, \ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n).$$

Montrer que :

(u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq v_n$. Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite.

Exercice 10

Soient (S_n) et (S'_n) les deux suites définies par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},\ S'_n = S_n + \frac{1}{n.\,n!}.$$

Montrer qu'elles sont adjacentes. Encadrer leur limite commune à 10^{-6} près et montrer qu'elle est irrationnelle. Cette limite est le nombre e.

Exercice 11

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 3\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}.$$

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_n \neq 1$. Déterminer les varations de la suite (u_n). Quelles sont les valeurs éventuelles de sa limite ?
2) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$$

est une suite géométrique dont on calculera la raison.
3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. Déterminer les limites de ces deux suites et vérifier que la suite (u_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$.

Exercice 12

1) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 0\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n}.$$

Montrer que cette suite est bien définie sur $\mathbb{N}$.
2) Etudier les variations des suites extraites (u_{2p}) et (u_{2p+1}). Déterminer les limites éventuelles de la suite (u_n).
3) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|.$$

En déduire que la suite (u_n) est convergente. Que peut on dire des suites extraites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) ?

Exercice 13

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n,\ u_0 = a,\ u_1 = b.$$

Déterminer u_n en fonction de a , b et n. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k^2.$$

Exercice 14

On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}.$$

Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$. Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 15

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a^2}{u_n}),\ a \in \mathbb{R}_+^*.$$

Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que la suite est minorée par a. Calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 16

On se propose de déterminer des valeurs approchées du nombre $\sqrt{3}$ à l'aide de la suite définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour $n \in \mathbb{N}$ par la relation :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{3}{u_n}).$$

1) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x}).$$

Etudier les variations de f sur $]0, +\infty[$, en déduire le minimum de f sur cet intervalle.
Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle et étudier l'existence d'une asymptote éventuelle quand x tend vers $+\infty$. Tracer la courbe représentative de f.
2) Etablir que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ puis déduire de la question précédente que $u_n \geq \sqrt{3}$. En déduire le signe de $u_{n+1} - u_n$ et la décroissance de la suite (u_n). Etablir que $\sqrt{3} \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq 1/8$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f sur $[\sqrt{3}, u_n]$ montrer que $0 \leq u_{n+1} - \sqrt{3} \leq (u_n - \sqrt{3})/8$ et que :

$$0 \leq u_n - \sqrt{3} \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{8^n}.$$

En déduire la convergence de la suite (u_n) vers $\sqrt{3}$.
3) Prouver par récurrence l'inégalité suivante :

$$0 \leq u_n - \sqrt{3} \leq 2\sqrt{3} \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \right)^{2^n}.$$

En utilisant $1,7 < \sqrt{3} < 2$ montrer que $0 \leq u_n - \sqrt{3} \leq 4.\,10^{-2^n}$.

Exercice 17

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*,\ a < b$. On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n},\ v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n},\ n \in \mathbb{N}.$$

1) a) Montrer que u_n et v_n sont strictement positifs pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Montrer que la suite de terme général $v_n - u_n$ est constante.
En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes et convergentes.

2) Montrer que :

$$\frac{u_n}{v_n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2^n} \text{ en comparant } \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \text{ et } \frac{u_n}{v_n}.$$

En déduire $l = \lim_{n\to\infty} u_n$ et $m = \lim_{n\to\infty} v_n$.

Exercice 18

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1,\ v_0 = 2,\ \frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2},\ n \in \mathbb{N}.$$

1) Montrer que :
a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0,\ v_n > 0,\ (u_n, v_n) \in \mathbb{Q}^2$.
b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$.
2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. En déduire qu'elles sont convergentes et qu'elles ont la même limite.
3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n.v_n = 2$.
4) Quelle est la limite de ces suites.