VARIABLES ALEATOIRES

Loi géométrique.

On répète une épreuve de Bernoulli, de paramètre p, $0 < p < 1$ et on s'arrête dès que l'on obtient 1. On appelle X le nombre de répétitions nécessaires. La loi de X est appelée loi géométrique de paramètre p. Les valeurs prises par X sont les éléments de $\mathbb{N}^*$. On pose $q = 1 - p$

$k \in \mathbb{N}^*$, $p_X(\{k\}) = q^{k-1}p$
car ceci revient à faire $k-1$ répétitions de $\overline{A}$ la k-ième répétitions donnant A.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = p\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p\,\frac{1}{1-q} = 1.$$

On a :$\phi_X(z) = p\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}z^k = pz\sum_{k=1}^{\infty}(qz)^{k-1} = pz\,\dfrac{1}{1-qz}$ pour $|z| < \dfrac{1}{q}$, on remarque que $\dfrac{1}{q} > 1$ lorsque $0 < p < 1$.

$\phi_X(z) = pz/(1-qz)$ d'où
$\phi'_X(z) = p/(1-qz)^2$, $\phi''_X(z) = 2pq/(1-qz)^3$.
$E(X) = \phi'_X(1) = 1/p$, $E(X^2) = \phi''_X(1) + E(X) = 2q/p^2 + 1/p$
$Var(X) = q/p^2$.

Loi hypergéométrique.

On choisit n objets parmi $N \geq n$ objets de deux types notés I et II. X représente le nombre d'objets de type I parmi les n objets. Il existe d objets de type I.

$$p_X(\{k\}) = \frac{C_n^k C_{N-d}^{n-k}}{C_N^n}\ ,\ \max(0, n-(N-d)) \leq k \leq \min(n, d)$$

Exercice 1

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements :
   A : "Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent".
   B : "Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent".
2. Soit X la variable aléatoire : "nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres" : Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

Exercice 2

Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : "nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20". Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) quelle est son espérance, son écart-type ? Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

Exercice 3

L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

1. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
   (a) les trois sujets tirés ;
   (b) exactement deux sujets sur les trois sujets ;
   (c) aucun des trois sujets.
2. Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Exercice 4

Un candidat se présente à un concours où, cette fois, les 20 questions sont données sous forme de QCM. A chaque question, sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. L'examinateur fait le compte des réponses exactes données par les candidats. Certains candidats répondent au hasard à chaque question ; pour ceux-la, définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Exercice 5

On lance 10 fois une pièce supposée bien équilibrée. On désigne par X la fréquence du nombre de fois où pile a été obtenu (c'est-à-dire le nombre de pile divisé par 10).

1. Quelle est la loi de X ?
2. Avec quelle probabilité X est-elle strictement au dessus de 0,5 ?
3. Avec quelle probabilité X est-elle comprise entre 0,4 et 0,6 (bornes incluses) ?
4. Déterminer le plus petit entier $a > 0$ telle que la probabilité que X soit dans l'intervalle $[0,5 - \frac{a}{10}, 0,5 + \frac{a}{10}]$ soit supérieure à 95%.
5. On lance la pièce 10 fois. Elle tombe 3 fois sur pile et 7 fois sur face. D'après vous la pièce est-elle bien équilibrée (on justifiera sa réponse en utilisant la question 3 ? Même question si on obtient 1 fois pile et 9 fois face.

Exercice 6

On lance deux dés à 6 faces. Déterminer la loi de la variable aléatoire donnant le maximum des deux chiffres obtenus.

Exercice 7

Le tableau ci-dessous donne la loi d'un couple de variables aléatoires $Z = (X, Y)$, avec X prenant ses valeurs dans $\{-1, 1\}$ et Y prenant ses valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$.

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	1/12	1/3	1/12
1	1/6	1/6	1/6

1. Déterminer la probabilité que X et Y soient égales.
2. Déterminer les lois de X et de Y.
3. Déterminer les lois de $X + Y$ et de XY.

Exercice 8

Charles ne supporte pas les chats et Sophie déteste les chiens. Charles n'élève pas plus d'un chien et Sophie pas plus d'un chat. La probabilité pour que Charles ait un chien est de $0,2$. Si Charles n'a pas de chien, la probabilité pour que Sophie ait un chat est de $0,1$. On note X le nombre de chiens de Charles, Y le nombre de chats de Sophie et Z le nombre d'animaux du couple.

1. Calculer la probabilité pour qu'ils n'aient pas d'animaux.
2. On suppose de plus que la probabilité que Z soit égal à 1 est de $0,1$.
   (a) Calculer la probabilité pour que Z soit égal à 2.
   (b) Déterminer l'espérance et l'écart-type de Z.
   (c) Établir la loi de probabilité du couple (X, Y). Quelle est la loi de probabilité de Y ?
   (d) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9

Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in]0,1[$. On définit $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Déterminer :
1) La loi du couple (U, V).
2) La covariance de U et de V.
3) U et V sont elles indépendantes ?

Exercice 10

Une urne contient des boules blanches (1/3) et des boules noires (2/3). On tire une boule. Si elle est blanche, le jeu est terminé. Si elle est noire, on la remet et on procède à un nouveau tirage et ceci jusqu'à l'obtention d'une boule blanche, le jeu est alors terminé. On appelle X le nombre de tirages à effectuer pour voir le jeu se terminer.
1) Quelle est la loi suivie par X. déterminer son espérance mathématique et calculer $P([X \leq 3])$ et $P([X > 4])$
2) Le gain étant de trente francs si la boule blanche sort au premier ou au deuxième coup, vingt francs au troisième, dix francs si elle sort au quatrième et cinq francs ensuite et sachant qu'il faut payer dix francs pour procéder à un tirage, le jeu est-il équitable ? (c'est à dire a-t-on $E(Z) = 0$ en appelant Z le bilan global) .
N.B. : En appellant Y le gain obtenu, déterminer la loi de Y et écrire une relation entre X , Y et Z .

Exercice 11

Soit $n \in I\!N^*$, on rappelle les identités

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \ , \ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Une urne contient r , $r > 1$ boules numérotées par $M = \{1, 2, \cdots, r\}$, on y prélève au hasard, successivement et sans remise 2 boules.
Soient X_1 , X_2 les variables aléatoires égales aux numéros des boules extraites de l'urne au premier et au second tirage.
1) a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) c'est à dire les probabilités $P([X_1 = k_1, X_2 = k_2])$. Déterminer les lois marginales de X_1 et X_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?
b) Calculer $E(X_1)$, $E(X_2)$, , $\text{Var}(X_1)$, $\text{Var}(X_2)$.
c) Pour $k \in M$, $k > 1$ calculer $P([X_1 = k] \cap [X_2 < k]$ et $P([X_1 < k] \cap [X_2 = k])$.
On considère maintenant la variable aléatoire U , $U(\omega) = \max\{X_1(\omega), X_2(\omega)\}$ et la variable aléatoire V définie par
$V(\omega) = 1$ si $X_1(\omega) > X_2(\omega)$, $V(\omega) = 2$ si $X_1(\omega) < X_2(\omega)$.
3) a) Déterminer la loi du couple (U, V).
b) Déterminer la loi de U et la loi de V. Ces variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 12

Un étudiant estime avoir 2,5 chances sur 100 d'arriver en retard au cours chaque matin. Ce retard est imputable à un grand nombre de facteurs (réveil-matin, bus, embouteillages ...) et il l'attribue au hasard. on considère une période de 40 jours ouvrables numérotés de 1 à 40.
1) On appelle X le numéro du premier jour de retard. Quelle est la loi suivie par X ? Quelle est la probabilité qu'il arrive en retard pour la première fois le dixième jour ?
2) On appelle Y le nombre de retards observables sur la période. Quelle est la loi suivie par Y ? Qelle est la probabilité qu'il arrive en retard une seule fois ?

Exercice 13

Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et en remplacer certaines le cas échéant. D'après des statistiques précédentes, il évalue à 30% la probabilité pour une machine de tomber en panne en 5 ans ; parmi ces dernières, la probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne plus grave est évaluée à 75% ; cette probabilité est de 40% pour une machine n'ayant jamais eu de panne.

1. Quelle est la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans d'être hors d'usage ?
2. Quelle est la probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant ?
3. Soit X la variable aléatoire "nombre de machines qui tombent en panne au bout de 5 ans, parmi 10 machines choisies au hasard". Quelle est la loi de probabilité de X, (on donnera le type de loi et les formules de calcul), son espérance, sa variance et son écart-type ?
4. Calculer $P[X = 5]$.

Exercice 14

Un gardien de nuit doit ouvrir une des portes à contrôler durant sa tournée, dans le noir. Il possède 10 clés d'allure semblable, mais une seule peut ouvrir la porte en question. Le gardien dispose de deux méthodes.

— Méthode A : Il pose les 10 clés devant lui et les essaye l'une après l'autre dans l'ordre dans lequel elles se présentent

— Méthode B : il essaye une clé après avoir agité le trousseau, en recommençant cette opération jusqu'à ce qu'il trouve la bonne clé .

On appelle X_A (resp. X_B) la variable aléatoire qui désigne le nombre de clés essayées (y compris celle qui donne satisfaction) par la méthode A (resp. B).
1) Montrer que X_A suit la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Quelle est la loi suivie par X_B ?
2) Quelle est la probabilité d'essayer plus de huit clés par la méthode A ? Par la méthode B ? On notera H l'évenement " essayer plus de huit clés ".
Le gardien utilise la méthode A deux fois sur trois, quelle est la probabilité conditionnelle que le gardien utilise la méthode B sachant que les huit premiers essais ont échoués ?