Université Louis Pasteur
U.F.R. de Mathématique et Informatique
2000/2001
D.E.U.G. 2$^{\text{ème}}$ année
Analyse M3

Feuille N°3 - Intégrales Multiples

1 Calculs d'intégrales doubles

Exercice 1.1
Représenter la partie Ω dans $\mathbb{R}^2$ et calculer l'intégrale double

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

dans chacun des cas suivants :

(a) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 < x < 1 \ , \ 1 < y < 2\}$,
$f(x,y) = xye^{-x-y}$,

(b) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y \leq 2 - x^2 \ , \ y \geq 2x - 1\}$,
$f(x,y) = x - y$,

(c) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ |x| < 1 \ , \ |y| < 1\}$,
$f(x,y) = (x+y)e^{x+y}$,

(d) $\Omega =$ le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,1)$ et $(2,0)$,
$f(x,y) = x + y$,

(e) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ xy \leq 16 \ , \ 0 \leq y \leq x \leq 8\}$,
$f(x,y) = x^2$,

(f) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \leq 3y \leq x \leq 3\}$,
$f(x,y) = e^{x^2}$.

Exercice 1.2
Calculer l'aire de la partie D du premier quadrant du plan délimitée par la courbe $y^2 = x^3$ et la droite d'équation $y = x$.

Exercice 1.3
Calculer l'intégrale double

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$$

dans chacun des cas suivants :

(a) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2+y^2 < 1\}$,
$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$,

(b) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2+y^2 < 1 \ , x+y > 1 \ , \ x < y\}$,
$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

(c) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ |x-y| < 1 \ , \ |x+y| < 1\}$,
$f(x,y) = e^{x+y}$,

(d) $\Omega =$ le triangle de sommets $(0,0)$, (a,a) et $(a,0)$,
$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$,

(e) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2+y^2-2y \leq 0\}$,
$f(x,y) = y$.

2 Calculs d'intégrales triples

Exercice 2.1
Calculer le volume du solide de $\mathbb{R}^3$ délimité par le paraboloïde d'équation $z = 2x^2+y^2$ et le cylindre $z = 4-y^2$.

Exercice 2.2
Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2+y^2 \leq z \leq 1-(x^2+y^2)\}$.

(a) Trouver un pavé de $\mathbb{R}^3$ contenant D.

(b) Dessiner la coupe de D par un plan vertical passant par l'axe (Oz) et calculer

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz \ .$$

Exercice 2.3
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le solide

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 0 \leq z \leq 2-x-y \ , \ x^2+y^2 \leq 2\} \ .$$

(a) Dessiner la projection de Ω sur le plan (xOy).

(b) Calculer le volume de Ω.

(c) Évaluer l'intégrale

$$\iiint_\Omega x \, dx \, dy \, dz \ .$$

Exercice 2.4
Calculer

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2) \, dx \, dy \, dz$$

où V est la partie de l'espace $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$x > 0 \ , \ y > 0 \ , z > 0 \ , \ x+y+z \leq 1 \ .$$

Exercice 2.5
Soit V la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1 \ , \ x > 0 \ , \ y > 0 \ , \ z > 0 \ .$$

Calculer le volume de V et l'intégrale

$$\iiint_V xyz \, dx \, dy \, dz \ .$$

3 Problèmes divers

Exercice 3.1
En utilisant le théorème de Fubini, donner une preuve du lemme de Schwarz :
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles d'ordre deux $D_{12}f$ et $D_{21}f$ continues. Alors $D_{12}f = D_{21}f$.
(Suggestion : si $D_{12}f(a) - D_{21}f(a) > 0$, il existe un rectangle A contenant a et tel que $D_{12}f - D_{21}f > 0$ sur A.)

Exercice 3.2
Pour tout $\rho > 0$, on considère les ensembles

$$B_\rho = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leq \rho^2\} \qquad \text{et} \qquad C_\rho = [-\rho, \rho] \times [-\rho, \rho] \ .$$

(a) Calculer les intégrales doubles

$$I_\rho = \iint_{B_\rho} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy \qquad \text{et} \qquad J_\rho = \iint_{C_\rho} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy \ .$$

(b) Montrer que

$$B_\rho \subset C_\rho \subset B_{\sqrt{2}\rho} \ .$$

(c) En déduire que

$$\lim_{\rho \to +\infty} I_\rho = \lim_{\rho \to +\infty} J_\rho \ .$$

(d) Retrouver la valeur de l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx \ .$$

Exercice 3.3
En intégrant la fonction $f(x,y) = x^y$ sur un domaine convenable, évaluer

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, dx \ , \qquad \text{pour } 0 < a < b \ .$$