GEOMETRIE DE L'ESPACE

Le repère utilisé est un repère orthonormé direct dans les exercices qui suivent.

Exercice 1

Soient $A(3, 4, -1) \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{u}(1, -1, 2)$, $\overrightarrow{v}(2, 1, -3)$ deux vecteurs de l'espace. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Exercice 2

1) On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations cartésiennes respectives :

$$2x - 4y + 3z + 5 = 0, \quad x - 2y + 3z - 2 = 0.$$

2) Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ et une équation cartésienne du plan $\mathcal{R}$ passant par $A(2, -2, 0)$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{Q}$.

Exercice 3

1) Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace E. Vérifier que

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}).$$

2) L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère othonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{vmatrix} = -cef, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

3) Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 12 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+2)(x-1)^2.$$

Exercice 4

Soit $ABCD$ un tétraèdre.
1) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.
En déduire que $(AB) \perp (CD)$ et $(AC) \perp (BD) \Longrightarrow (AD) \perp (BC)$.
2) On appelle A', B', C', D' les projections orthogonales des points A, B, C, D sur les plans $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$ respectivement. B_1 est le pied de la hauteur issue de B dans BCD. On dit que le tétraèdre $ABCD$ est orthocentrique si ses arêtes opposées sont deux à deux orthogonales.
a) Montrer que $(ABCD)$ orthocentrique entraine A' orthocentre de BCD.
b) Montrer que $(ABCD)$ orthocentrique entraine $AB'B_1$ et $BA'B_1$ alignés.
En déduire que (AA') et (BB') sont coplanaires. On pose
$\{H\} = (AA') \cap (BB')$.
c) Montrer que $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BD} = 0$, $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AD} = 0$ en déduire que $H \in (CC')$.
d) Montrer que $H \in (DD')$.

Exercice 5

On considère les deux droites d'équations cartésiennes

$$D_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4 \\ x-y+z & = & 6 \end{array} \right.$$

$$D_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & 4 \\ x+y+z & = & -2 \end{array} \right.$$

Déterminer le plan $\mathcal{P}$ contenant la droite D_1 et admettant $\overrightarrow{u_2}$ comme vecteur directeur, où $\overrightarrow{u_2}$ est un vecteur directeur de D_2.
Vérifier que le point A de coordonnées $(1, 0, -3)$ est un point de D_2. Déterminer la projection orthogonale de A sur $\mathcal{P}$, en déduire une représentation paramétrique de la droite D_2' projection orthogonale de D_2 sur $\mathcal{P}$. Déterminer les coordonnées de $\{H_1\} = D_1 \cap D_2'$ puis de $\{H_2\} = \Delta \cap D_2$ où Δ est la perpendiculaire commune de D_1 et de D_2.

Exercice 6

Soient A, B, C trois points non alignés de l'espace, A', B', C' sont les symétriques respectifs de A, B, C par rapport aux points B, C, A. En utilisant le produit vectoriel, montrer que l'aire du triangle $A'B'C'$ est sept fois l'aire du triangle ABC.

Exercice 7

Soient $A(1,-1,-2)$, $B(3,1,1)$ deux points et $\overrightarrow{n}(1,2,-2)$ un vecteur de l'espace. Vérifier que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et B et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Exercice 8

soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. Montrer que :

$(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$.

On pourra choisir une base $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ orthonormée directe telle que $\overrightarrow{i}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{j}$ orthogonal à $\overrightarrow{i}$ dans le plan vectoriel $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{j}$.

Exercice 9

Soients $A(3,-2,4)$, $B(-2,1,3)$, $C(1,1,\alpha)$. Déterminer α pour que le triangle ABC soit rectangle en A. Calculer alors $\cos(\widehat{ABC})$.

Exercice 10

On appelle $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(-1,2,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1,1,-1)$. Soit $B(2,1,-3)$ un point de l'espace. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par B et perpendiculaire à $\mathcal{D}$. En déduire les coordonnées du point H projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$.

Exercice 11

Soit $\mathcal{D}$ la droite de l'espace $\mathcal{E}$ passant par $A(-1,2,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1,1,-1)$. Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale H du point $B(2,1,-3)$ sur la droite $\mathcal{D}$. Calculer la distance de B à cette droite.

Exercice 12

Soit M, A, B, C des points de $\mathcal{E}$. Montrer que :

$$\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}.$$

En déduire l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}.$$

Exercice 13

On considère les points $A(1,-1,4)$, $B(2,-1,-4)$ et $C(1,3,4)$.
1) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace vérifiant
$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 3$.
2) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $MB = 2MA$.

Exercice 14

On considère les droites $\mathcal{D}_1$ d'équations cartésiennes $x+y-z-1=0,\ x-2y+z=0$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations cartésiennes $x+y+z=0,\ 2x+y+2=0$. Déterminer une repésentation paramétrique de leur perpendiculaire commune Δ et les coordonnées des points de Δ avec $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Exercice 15

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère les deux droites d'équations

$$D_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2-2t \\ y & = & 1+t \\ z & = & t \end{array} \right. ,t \in \mathbb{R}$$

$$D_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -1+u \\ y & = & 2-3u \\ z & = & \lambda+2u \end{array} \right. ,u \in \mathbb{R}$$

1) D_1 et D_2 sont elles parallèles ?
2) Déterminer λ pour que D_1 et D_2 soient sécantes. Déterminer alors les coordonnées du point d'intersection.
3) Pour cette valeur de λ, donner une représentation paramétrique du plan P qui contient D_1 et D_2.

Exercice 16

On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations cartésiennes respectives :

$$2x-4y+3z+5=0,\ \ x-2y+3z-2=0.$$

Vérifier que ces deux plans ne sont pas parallèles. On appelle D la droite intersection de ces deux plans. Déterminer le plan contenant D et perpendiculaire à P. En déduire la distance du point $A(3,1,2)$ à cette droite D.

Exercice 17

Soient $\mathcal{S}$ la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ (vérifier que c'est une sphère) et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+y-2z-2=0$. Montrer que leur intersection est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 18. Mines sup 2005. Partiel

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère orthonormé direct $R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On note $\mathcal{D}'$ la droite passant par O dirigée par $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\mathcal{D}$ la droite d'équations $\begin{cases} y &= z \\ x &= 1 \end{cases}$
Q le plan d'équation $y+z=0$ et enfin, pour tout réel m, $\mathcal{P}_m$ est le plan d'équation $x+my-mz=1$.

A - 1) Donner un vecteur normal $\vec{n}_m$ de $\mathcal{P}_m$ ainsi qu'un point et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Vérifier que tous les plans $\mathcal{P}_m$ contiennent la droite $\mathcal{D}$.

A - 2) Calculer $\vec{r}_m=\vec{n}_m\wedge\vec{a}$. En déduire que $\mathcal{D}'$ n'est pas orthogonale à $\mathcal{P}_m$. On appelle alors R_m l'unique plan contenant $\mathcal{D}'$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$. Obtenir une équation cartésienne de R_m.

A - 3) Déterminer, pour tout réel m, les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de I_m point d'intersection des plans $\mathcal{P}_m, Q$ et R_m.

exercice 19

Déterminer les équations de la projection orthogonale de la droite $\mathcal{D}$:

$$5x-4y-2z-5=0,\ \ x+2z-2=0$$

sur le plan $\mathcal{P}$: $2x-y+z-1=0$.