Extremum d'une fonction de deux variables

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x,y) = (x^2 + y^2)^x$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$.

1.a Etudier la continuité de f en $(0,0)$.

1.b Etudier l'existence des dérivées partielles de f en $(0,0)$.

2. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par : $g : x \mapsto f(x,0)$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

2.a Dresser le tableau de variation complet de g.

2.b En déduire que la fonction f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$.

3. Déterminer les points critiques de f à l'intérieur de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

4.a Vérifier que pour tout $x \geq 0, f(x,y) \geq g(x)$.

En déduire que f admet un minimum en $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, 0\right)$.

4.b La fonction admet-elle un extremum en $\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}, 0\right)$?

5. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, les deux expressions : $\left(f(x,1) - f(0,1)\right)$ et $\left(f(x,-1) - f(0,-1)\right)$ sont du signe de x. Qu'en conclure ?