Propriétés de $\mathbb{R}$

Exercice 1. *Morphismes de* $\mathbb{R}$

Soit $f\ :\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ un morphisme de corps.

1) Montrer que : $\forall\ x\in\mathbb{Q},\ f(x)=x$.

2) Montrer que f est une application croissante.

3) En déduire que $f=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 2. *Parties denses*

Soit $A\subset\mathbb{R}$ vérifiant : $\begin{cases}\forall\ x\in\mathbb{R},\ \exists\ a,b\in A \text{ tq } a<x<b\\ \forall\ a,b\in A,\ \dfrac{a+b}{2}\in A.\end{cases}$

Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. *Parties denses*

Soir A un sous-anneau de $\mathbb{R}$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $A\cap]0,1[\neq\varnothing$.

Exercice 4. *Sous-groupes de* $\mathbb{R}$

Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, $H\neq\{0\}$. On pose $H^{+*}=H\cap\mathbb{R}^{+*}$, et $\alpha=\inf(H^{+*})$.

1) Si $\alpha\in H^{+*}$, montrer que $H=\alpha\mathbb{Z}$.

2) Si $\alpha\notin H^{+*}$, montrer que $\alpha=0$ et en déduire que H est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5. *Partie entière*

1) Soient $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{N}^*$. Montrer que : $\left[\dfrac{a}{b}\right]+\left[\dfrac{a+1}{b}\right]+\ldots+\left[\dfrac{a+b-1}{b}\right]=a$.

2) Soient $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{N}^*$. Montrer que : $\left[\dfrac{a}{b}\right]+\left[\dfrac{a+1}{b}\right]+\ldots+\left[\dfrac{a+b-1}{b}\right]=[a]$.

Exercice 6. *Nombres irrationnels*

Soit $a\in\mathbb{Q}^+$ tel que $\sqrt{a}\notin\mathbb{Q}$.

Montrer qu'il existe $C>0$ tel que pour tout rationnel $r=\dfrac{p}{q}$, on a : $\left|r-\sqrt{a}\right|\geqslant\dfrac{C}{q^2}$.

Exercice 7. *Nombres irrationnels*

Soient $a,b\in\mathbb{Q}^+$ tels que $\sqrt{b}\notin\mathbb{Q}^+$. Montrer qu'il existe $x,y\in\mathbb{Q}^+$ tels que $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a+\sqrt{b}}$ si et seulement si a^2-b est un carré dans $\mathbb{Q}$.

Solutions

Exercice 5.

1) $a = bq + r \Longrightarrow \sum = \underbrace{q + q + \ldots + q}_{b-r} + \underbrace{(q+1) + \ldots + (q+1)}_{r} = bq + r = a.$

Exercice 6.

Pour $r < 0$, on a $\left|r - \sqrt{a}\right| \geqslant \dfrac{1}{q^2}$.

Pour $r \geqslant 0$, on pose $a = \dfrac{m}{n}$: $|r^2 - a| = \left|\dfrac{p^2}{q^2} - \dfrac{m}{n}\right| \geqslant \dfrac{1}{nq^2}$.

Donc $\left|r - \sqrt{a}\right| \geqslant \dfrac{1}{nq^2\left|r + \sqrt{a}\right|} \geqslant \dfrac{1/n\sqrt{a}}{q^2}$.

Exercice 7.

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a + \sqrt{b}} \Longleftrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = a + \sqrt{b} \Longleftrightarrow b + 4xy - 4\sqrt{bxy} = (x + y - a)^2$.

$\Longrightarrow$: $bxy = r^2 \Longrightarrow \sqrt{b}\left(1 - \dfrac{2r}{b}\right) = x + y - a \Longrightarrow r = \dfrac{b}{2}$ et $x + y = a \Longrightarrow (x - y)^2 = a^2 - b$.

$\Longleftarrow$: $a^2 - b = u^2$. On prend $x = \dfrac{a+u}{2}$ et $y = \dfrac{a-u}{2} \Longrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = a + \sqrt{b}$.