SUITES

Exercice 1 Etudier les convergences des suites définies par :

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+2k+1}\ ,\quad v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\,,\qquad w_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}E(kx)\ ,\qquad t_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$$

Exercice 2 Etudier les convergences des suites définies par

$$u_n=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n}k!\qquad ,\quad v_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k!\qquad ,\quad w_n=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n}k!$$

Exercice 3

1. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$
2. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
3. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a $w_{2n}\leq\frac{1}{2}w_n+\frac{1}{2\sqrt{n}}$
4. Etudier la convergence de la suite(w_n)

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\forall n\in\mathbb{N}\ \ ,\ u_n\in\mathbb{Z}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est stationnaire à partir d'un certain rang .

Exercice 5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}},(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}},(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent . Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge .

Exercice 6 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes . On pose $x_n=\sup(u_n,v_n)\quad y_n=\inf(u_n,v_n)$, montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leurs limites .

Exercice 7 Moyenne de Césaro :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k$ appelée suite des moyennes de Césaro .

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l . La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim u_n=+\infty$. Montrer que $\lim v_n=+\infty$.
3. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
4. Lemme de l'escalier :
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_{n+1}-u_n$ converge vers a . Montrer que $\lim\frac{u_n}{n}=a$ et $\lim\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{a}{2}$
5. Applications : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\forall n\in\mathbb{N}\qquad u_n>0$
   (a) Montrer que si $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$ alors $\lim(u_n)^{\frac{1}{n}}=l$
   (b) En déduire les limites des suites suivantes : $n^{\frac{1}{n}}\quad,\quad(C_{pn}^{n})^{\frac{1}{n}}\quad,\quad(\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k}))^{\frac{1}{n}}\qquad,\quad\frac{1}{n}(\frac{(2n)!}{n!})^{\frac{1}{n}}$
6. Généralisation :
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$. On suppose $\lim u_n=l$ et $\lim\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=+\infty$. Soit $v_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u_k}{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k}$. Montrer que $\lim v_n=l$

Exercice 8 On remarque que $\frac{1}{37}=0,\overline{027}$ *et* $\frac{1}{27}=0,\overline{037}$ où les chiffres surmontés de la barre sont répétés indéfiniment.Expliquez le phénomène et essayer de le généraliser.

Exercice 9 Etudier la limite de:

$$u_n=(1+\frac{1}{n})^n\quad;\quad u_n=(1+e^{-n})^{1+n}\quad;\quad u_n=(\frac{n+1}{n+2})^n$$

Exercice 10 Même question avec:

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\qquad;\quad u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!+(k+1)!}\qquad;\quad u_n=\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}\qquad|x|<1$$

Exercice 11 Après avoir étudier le sens de variations montrer que la suite converge

$$r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-1}$$

Exercice 12 définit par récurrence deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$de la manière suivante:

$$u_0 = a; \quad v_0 = b; \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 13 Soit $0 < v < 1$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$0 < u_0 < u_1 \ \ et \ \ u_{n+1} = u_n + v^n u_{n-1}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 14 Etudier la convergence des suites suivantes:

$$u_n = \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n} \ ; \ u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \ ; \ u_n = n^2 - \ln n \ ; \ u_n = \frac{n - \sqrt{\ln n}}{2^n - n} \ ;$$

$$u_n = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{3}{n})} \ ; \ u_n = \frac{2^n - n!}{5^n + 3n!} \ ; \ u_n = \frac{n^5 + \cos 3n}{3^n + \sin(7n)} \ ; \ u_n = \frac{n^4 + n^3 \sin n + \cos n}{3^n + \sin 7n}$$

$$u_n = \frac{10^{3n} + n!}{n! + n^{1000}} \ ; \ u_n = \sqrt{n^2 + 2n + 5} - \sqrt{n+1} \ ; \ u_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k \ ; \ u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$; $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$; $u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n}(3k+1)}{\sum_{k=1}^{n}(2k+3)}$

Exercice 15 On pose $u_n = \frac{4^n}{C_{2n}^n}$ et $v_n = \sqrt{n}$. Montrer que $u_n = O(v_n)$

Exercice 16 Donnez un exemple simple de deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et telles que : $u_n \sim v_n$; $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante ; $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit monotone à partir d'aucun rang.

Exercice 17 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$;trouver un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} E[kx]$.

Exercice 18 Soit $P_n(x) = -1 + x + ...x^n$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n$tel que:$P_n(x_n) = 0$.(Onpourra utiliser des résultats vus en terminale).
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.
4. soit $x_n = \frac{1}{2} + \varepsilon_n$.Montrer que $\varepsilon_n \backsim (\frac{1}{2})^{n+2}$.

Exercice 19 Donnez un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}}$.(On pourra utiliser le théorème de Césaro).

Exercice 20 Etudier les suites définies par les relations de récurrence suivantes:

$$u_0 = 0 \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{3 - u_n} \quad ; u_0 > 0 \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2u_n} \quad ; u_0 = 1 \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \quad ;$$

$$u_0 = a \quad u_{n+1} = \frac{2u_n - 4}{3 - u_n} \ pour \quad a = 0 \quad puis \quad a = 5 \quad puis \quad a = 4 \quad ; u_0 = 0 \quad u_{n+1} = \cos(u_n)$$

Exercice 21 Etudier suivant les valeurs de a les suites définies par:

$$u_0 = a \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

$$u_0 = a \quad u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16}$$

$$u_0 = a \quad u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{1 + 2u_n}$$