Exercice

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & C_1^1 & C_2^2 & \cdots & C_n^n \\ 0 & 1 & C_2^1 & \cdots & C_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & C_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

et $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de sa base canonique $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$. On appelle u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.
1) On suppose, dans cette question, $n = 3$. Déterminer $u(1), u(X), u(X^2)$ et $u(X^3)$.
Déterminer $u(P)$ avec $P = 1 + X + 2X^2 + X^3$, puis avec $P = a + bX + cX^2 + dX^3$, $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
2) Dans cette question n est quelconque. Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$. Montrer que $u(P) = P(X + 1)$, en déduire $u^{-1}(Q)$ pour un polynôme $Q \in E$. En déduire A^{-1}.

Exercice

Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B}$. La matrice identité est notée I et ϕ est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

1) a) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
b) Déterminer les réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I$ n'est pas de rang 3, c'est à dire n'est pas inversible.
c) Déterminer, pour chacune de ces valeurs de λ, le noyau de $\phi - \lambda I$.
d) En déduire une base dans laquelle la matrice de ϕ est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

.
2) a) Vérifier que $A^3 = -2A^2 + A + 2I$ (on pourra utiliser D).
b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe des rationnels a_n, b_n et c_n tels que $A^n = a_nA^2 + b_nA + c_nI$.
c) Ecrire la matrice C telle que

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

3) a) Soit ψ l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est C.
En s'inspirant de 1) montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de ψ est diagonale.
b) En déduire C^n et calculer les nombres a_n, b_n et c_n en fonction de n.