

Une matrice est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé. Une méthode efficace pour trigonaliser une matrice est d'utiliser les sous espaces caractéristiques.

Si  $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^k (X - a_i)^{\alpha_i}$  le sous espace caractéristique  $N_i$  est le noyau de  $(A - a_i I)^{\alpha_i}$ .

Le sous espace propre  $E_A(a_i)$ , qui est le noyau de  $(A - a_i I)$  est un s.e.v. de  $N_i$ , la différence c'est que l'espace  $E$  est somme directe des  $N_i$  alors que ce n'est pas toujours le cas pour les  $E_A(a_i)$ , pour que ce soit le cas il faut et il suffit que tous les  $E_A(a_i)$  aient pour dimension  $\alpha_i$ , l'ordre de la valeur propre.

Quand la matrice n'est pas diagonalisable on détermine une base dans chaque  $N_i$ , la réunion de ces bases est une base de  $E$  dans laquelle l'endomorphisme associé à  $A$  a une matrice triangulaire. Je te fais un exemple.

$$A := \begin{bmatrix} -17 & -10 & 14 & -8 \\ 14 & 7 & -10 & 13 \\ -16 & -10 & 14 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tu as  $\chi_A(X) = (1 - X)^2(2 - X)^2$ , les valeurs propres sont d'ordre deux, le polynôme est scindé, mais les sous espaces propres sont de dimension 1, la matrice n'est pas diagonalisable. Il reste à déterminer deux vecteurs formant une base du noyau de  $(A - I)^2$  et deux vecteurs formant une base du noyau de  $(A - 2I)^2$ . Je n'ai pas le temps de terminer mais tu peux le faire en exercice et déterminer la nouvelle matrice dans cette base. Aides toi de Maple.