Variables discrètes finies - Exercices pratiques

Exercice 1 - Loi d'un dé truqué - *L2/ECS* - ⋆

On considère un dé cubique truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k (on suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6). Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé.

1. Déterminer la loi de X, calculer son espérance.
2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y, et son espérance.

Exercice 2 - Garagiste - *L2/ECS* - ⋆

Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$P(X = 0) = 0,1 \ P(X = 1) = 0,3 \ P(X = 2) = 0,4 \ P(X = 3) = 0,2.$$

1. On note Z le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de Z. On pourra considérer dans la suite que X et Y sont indépendantes.
2. On note Y la variable aléatoire : " nombre de clients satisfaits par jour". Déterminer la loi de Y.
3. Calculer la marge brute moyenne par jour.

Exercice 3 - Vaches laitières - *L2/ECS* - ⋆

Les vaches laitières sont atteintes par une maladie M avec la probabilité $p = 0,15$. Pour dépister la maladie M dans une étable de de n vaches, on fait procéder à une analyse de lait. Deux méthodes sont possibles :

Première méthode : On fait une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache.

Deuxième méthode : On effectue d'abord une analyse sur un échantillon de lait provenant du mélange des n vaches. Si le résultat est positif, on effectue une nouvelle analyse, cette fois pour chaque vache.

On voudrait connaître la méthode la plus économique (=celle qui nécessite en moyenne le moins d'analyse). Pour cela, on note X_n la variable aléatoire du nombre d'analyses réalisées dans la deuxième étape. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1. Déterminer la loi de Y_n, et montrer que son espérance vaut : $1 + \frac{1}{n} - (0.85)^n$.
2. Etudier la fonction $f(x) = ax + \ln x$, pour $a = \ln(0,85)$. Donner la liste des entiers n tels que $f(n) > 0$.
3. Montrer que $f(n) > 0$ équivaut à $E(Y_n) < 1$. En déduire la réponse (en fonction de n) à la question posée).

Lois discrètes usuelles

Exercice 4 - Avion - *L2/Prépa Hec* - $\star$

A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ? (on discutera en fonction de p).

Exercice 5 - Pièce de monnaie - *L2/Prépa Hec* - $\star$

On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit 0,3.

1. On lance 10 fois la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois pile ?
2. On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la première fois. Combien effectuera-t-on en moyenne de lancers ?

Exercice 6 - Service de dépannage - *L2/Prépa Hec* - $\star$

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0,25.

1. Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance, sa variance.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement : "Le client a au moins subi un retard".
2. Le nombre d'appels reçus par jour est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre m. On note Z le nombre d'appels traités en retard.
   (a) Exprimer la probabilité conditionnelle de $Z = k$ sachant que $Y = n$.
   (b) En déduire la probabilité de "$Z = k$ et $Y = n$".
   (c) Déterminer la loi de Z. On trouvera que Z suit une loi de Poisson de paramètre $m \times 0,25$.
3. En 2013, le standard a reçu une succession d'appels. On note U le premier appel reçu en retard. Quelle est la loi de U ? Quelle est son espérance ?

Exercice 7 - Le concierge - *L2/Prépa Hec* - $\star\star$

Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de n clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

1. Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.
2. En réalité, la soirée était bien arrosée, et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

Exercice 8 - Chaîne de fabrication - *Ecricome* - $\star\star$

On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendemment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est 0.2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A" .
2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.
   (a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.
   (b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k|Y = n)$. (On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).
   (c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i\in\mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2 .

Exercice 9 - Un problème chinois ! - *L2* - ⋆⋆

On suppose qu'à la naissance, la probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon est égale à 1/2. On suppose que tous les couples ont des enfants jusqu'à obtenir un garçon. On souhaite évaluer la proportion de garçons dans une génération de cette population. On note X le nombre d'enfants d'un couple et P la proportion de garçons.

1. Exprimer P en fonction de X.
2. Donner la loi de la variable aléatoire X.
3. Que vaut $E(P)$? Qu'en pensez-vous ?

Exercice 10 - Minimum et maximum de deux dés - *L2* - ⋆⋆

On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Donner la loi de X. En déduire $E(X)$.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $E(Y)$.
3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 11 - Pile ou face - *Oral ESCP* - ⋆⋆

On considère une suite de parties indépendantes de pile ou face, la probabilité d'obtenir "pile" à chaque partie étant égale à p, où $p \in]0, 1[$. Si $n \geq 1$, on note T_n le numéro de l'épreuve amenant le $n-$ième pile. Enfin, on pose $A_1 = T_1$ et$A_n = T_n - T_{n-1}$.

1. Quelle est la loi de T_1 ? Donner la valeur de son espérance.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer que $A_1, \ldots, A_n$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi.

VARIABLES DISCRÈTES INFINIES

Exercice 12 - Une certaine variable aléatoire - *Oral ESCP* - ⋆

Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de X.

2. Montrer que X admet une espérance, et la calculer.
3. On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y. Calculer l'espérance de Y.
4. On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Exercice 13 - Deux fois pile - *L2/ECS* - $\star$

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est 2/3, et donc celle d'obtenir face est 1/3. Les lancers sont supposés indépendants, et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \geq 1$, on note p_n la probabilité $P(X = n)$.

1. Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$, et déterminer la valeur de p_2, p_3, p_4.
2. Montrer que l'on a $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}.$, $n \geq 4$.
3. En déduire l'expression de p_n pour tout n.
4. Rappeler, pour $q \in]-1, 1[$, l'expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$, et calculer alors $E(X)$.

Exercice 14 - Loi de Pascal - *L2* - $\star$

On lance une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut p. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaire pour obtenir r fois pile. Quelle est la loi de X ?

Exercice 15 - Rangée de spots - *Oral ESCP* - $\star\star$

Une rampe verticale de spots nommés de bas en haut $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ change d'état de la manière suivante :

- à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé.
- si, à l'instant $t = n,\ n \geq 0$, le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ s'allume à l'instant $t = n+1$, et ceci de manière équiprobable.
- si, à l'instant $t = n,\ n \geq 0$, le spot S_k $(2 \leq k \leq 4)$ est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n = 1$.

On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant (s'il existe) où le spot S_2 s'allume.

1. Calculer la probabilité pour que le spot S_1 reste constamment allumé jusqu'à l'instant n.
2. Calculer la probabilité des événements $(X = 1)$ et $(X = 2)$.
3. Calculer la probabilité des événements $(X = n)$, pour $n \geq 3$.
4. Déterminer l'espérance de X.

VARIABLES DISCRÈTES - EXERCICES THÉORIQUES

Exercice 16 - Maximiser l'espérance - *Oral ESCP* - $\star\star$

Soit $n \geq 2$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, et suivant la loi uniforme discrète sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. On considère a un entier de $\{1, 2, \ldots, n\}$, et Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leq a \\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) > a. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Y (vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité).
2. Calculer l'espérance de Y et la comparer à l'espérance de X_1.
3. Pour quelles valeurs de a cette espérance est-elle maximale ?

Exercice 17 - Entropie d'une variable aléatoire - *L3* - ⋆⋆

Soit X une variable aléatoire discrète prenant la valeur x_i avec probabilité p_i, pour $i = 1, \dots, n$. On définit l'*entropie* de X par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i).$$

1. Calculer $H(X)$ si X est constante.
2. Calculer $H(X)$ si X est équidistribuée.
3. Trouver la valeur maximale de $H(X)$ pour X parcourant l'ensemble des variables aléatoires discrètes prenant au plus n valeurs.

Exercice 18 - Une autre expression de l'espérance - *L2/L3/Master Enseignement* - ⋆⋆

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$
   (b) On suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge. Démontrer que X admet une espérance.
   (c) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Démontrer alors que $\big(nP(X > n)\big)_n$ tend vers 0, puis que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ converge, et enfin que
   $$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$
2. Application : on dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N. On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.
   (a) Que vaut $P(X \leq k)$? En déduire la loi de X.
   (b) A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $E(X)$.
   (c) A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite $\left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n\right)_N$ admet une limite (lorsque N tend vers $+\infty$) que l'on déterminera.
   (d) En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \frac{E(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$.