Variables discrètes finies - Exercices pratiques

Exercice 1 - Loi d'un dé truqué - *L2/ECS* - ⋆

1. X prend ses valeurs dans $\{1,\dots,6\}$. Par hypothèse, il existe un réel a tel que $P(X=k)=ka$. Maintenant, puisque P_X est une loi de probabilité, on a :
$$\sum_{k=1}^{6}P(X=k)=1 \iff a\frac{6\times 7}{2}=1 \implies a=1/21.$$
On a donc :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

On vérifie aisément en appliquant la formule que $E(X)=\frac{13}{3}$.

2. On a $Y=k \iff X=1/k$. Y prend donc ses valeurs dans $\{1,1/2,1/3,1/4,1/5,1/6\}$, et la loi est donnée par :

k	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
$P(Y=k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

Le calcul de l'espérance n'est pas plus difficile, et donne :
$$E(Y)=\frac{2}{7}.$$
Attention à l'erreur suivante : ce n'est pas parce que $Y=1/X$ que $E(Y)=1/E(X)$!!!.

Exercice 2 - Garagiste - *L2/ECS* - ⋆

1. Z est élément de $\{0,1,2\}$. On a :
$$P(Z=2)=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{25}$$
(les deux voitures sont disponibles). D'autre part,
$$P(Z=0)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$$
(les deux voitures sont simultanément indisponibles). Enfin, on obtient :
$$P(Z=1)=1-P(Z=0)-P(Z=1)=\frac{8}{25}.$$
2. Remarquons que Y est à valeurs dans $\{0,1,2\}$. On calcule sa loi en utilisant la formule des probabilités totales. L'événement $Y=0$ se produit si $X=0$ ou bien si $X\geq 1$ et $Z=0$. Ces deux événements étant disjoints, on a :
$$P(Y=0)=P(X=0)+P(X\geq 1\cap Z=0)=P(X=0)+P(X\geq 1)P(Z=0)$$

(la disponibilité des voitures étant supposée indépendante de l'arrivée des clients). D'où :

$$P(Y=0)=0,1+0,9\times\left(\frac{1}{5}\right)^2=0,136.$$

De même, l'événement $Y=1$ se produit si $X=1$ et $Z\geq 1$ ou bien si $X\geq 2$ et $Z=1$. On en déduit :

$$P(Y=1)=P(X=1)P(Z\geq 1)+P(X=2)P(Z=1)=0,48.$$

Enfin, l'événement $Y=2$ est réalisé si $X\geq 2$ et $Z=2$. Ceci donne :

$$P(Y=2)=P(X\geq 2)P(Z=2)=0,6\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=0,384.$$

3. La marge brute vaut $300Y$. La marge brute moyenne par jour est en euros :

$$E(300Y)=300(0\times 0,136+1\times 0,48+2\times 0,384)=374,4.$$

Exercice 3 - Vaches laitières - *L2/ECS* - $\star$

1. Y_n ne prend que deux valeurs, $1/n$ et $1+1/n$. On a en outre :

$$(Y_n=1/n)\iff \text{aucune vache n'est malade}$$

d'où $P(Y_n=1/n)=0,85^n$. On en déduit - la loi de Y est une loi de probabilité - $P(Y=1+1/n)=1-(0,85)^n$. Le calcul de l'espérance donne :

$$E(Y_n)=\frac{0,85^n}{n}+\frac{n+1}{n}(1-0,85^n)=1+\frac{1}{n}-0,85^n.$$

2. f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et $f'(x)=\frac{1+ax}{x}$. $f'(x)$ est donc du signe de $1+ax$, ce qui permet de dire que f est croissante sur $]0,-1/a[$, et décroissante ensuite. La limite de f en $+\infty$ est $-\infty$, il en est de même en 0. En calculant les valeurs successives de $f(n)$, on a $f(17)>0,07$ et $f(18)<-0,03$. 17 est donc la plus grande valeur entière pour laquelle $f(n)$ est positive. En outre, $f(1)<0$ alors que $f(2)>0$. L'ensemble d'entiers recherché est donc $\{2,\dots,17\}$.
3. On a :

$$\begin{aligned}E(Y_n)<1 &\iff 1+\frac{1}{n}-0,85^n<1\\ &\iff 0,85^n>\frac{1}{n}\\ &\iff n\ln(0,85)>-\ln n.\end{aligned}$$

Par suite, $E(Y_n)<1\iff f(n)>0$. L'étude précédente montre que les entiers n pour lesquels $f(n)>0$ est $\{2,\dots,17\}$. On a intérêt à choisir la deuxième méthode si, et seulement si, il y a de 2 à 17 vaches dans l'étable !

Lois discrètes usuelles

Exercice 4 - Avion - *L2/Prépa Hec* - $\star$

On note X la variable aléatoire du nombre de moteurs de A qui tombent en panne, et Y la variable aléatoire du nombre de moteurs de B qui tombent en panne. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(4,p)$. En particulier, on a :

$$P(X=0)+P(X=1)=\binom{4}{0}p^0(1-p)^{4-0}+\binom{4}{1}p^1(1-p)^{4-1}=(1-p)^4+4p(1-p)^3.$$

D'autre part, Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2,p)$. En particulier,

$$P(Y=0)=(1-p)^2.$$

On a intérêt à prendre l'avion A si $P(X=0)+P(X=1)\geq P(Y=0)$. Ceci donne :

$$p(1-p)^2(2-3p)\geq 0.$$

Donc, si $0\leq p<2/3$ (cas que l'on espère être celui du monde réel), il est préférable de choisir A. Si $p=2/3$, le choix est indifférent, et si $p>2/3$, il vaut mieux choisir B.

Exercice 5 - Pièce de monnaie - *L2/Prépa Hec* - $\star$

1. Soit X le nombre de piles obtenus au cours de 10 lancers. X est le nombre de réalisations de l'événement "le lancer donne pile" de probabilité constante 0,3 au cours de 10 lancers indépendants. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,3$. On en déduit : $P(X=3)=\binom{10}{3}(0,3)^3(1-0,3)^{10-3}\simeq 0,27$.
2. Soit Y le nombre de lancers effectués jusqu'à l'obtention de pile pour la première fois. Y est le temps d'attente de la première réalisation de l'événement "obtenir pile" de probabilité constante 0,3 lors d'une suite de lancers indépendants, donc Y suit une loi géométrique de paramètre 0,3. On en déduit, en appliquant la formule du cours du calcul de l'espérance d'une loi géométrique
$$E(Y)=\frac{1}{0,3}=\frac{3}{10}.$$

Exercice 6 - Service de dépannage - *L2/Prépa Hec* - $\star$

1. (a) Soit R l'événement "le client a subi un retard". X est le nombre de réalisations de l'événement R de probabilité constante $1/4$ au cours de 4 appels indépendants. Donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(4,1/4)$. En particulier, on a :
$$E(X)=1 \text{ et } V(X)=\frac{3}{4}.$$
   (b) On cherche $P(X\geq 1)$:
$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\left(\frac{3}{4}\right)^4.$$

2. (a) On note $p = 0,25$ et $q = 1 - 0,25$. On reconnait le schéma théorique d'une variable aléatoire de loi binomiale. On a donc :

$$P(Z = k|Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} P(Z = k, Y = n) &= P(Y = n)P(Z = k|Y = n) \\ &= \begin{cases} e^{-m}\frac{m^n}{n!}\binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

(c) Il faut réaliser la sommation ! On a, tenant compte du fait que les premiers termes sont nuls :

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(Z = k, Y = n) \\ &= e^{-m}\left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(mq)^n}{(n-k)!} \\ &= e^{-m}\left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!}(mq)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(mq)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-m}\left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!}(mq)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(mq)^n}{(n)!} \\ &= e^{-m}\left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!}(mq)^k e^{mq} \\ &= e^{-mp}\frac{(mp)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Z suit donc une loi de Poisson de paramètre $m \times 0,25$.

3. U est le rang de la première réalisation de l'événément R de probabilité $1/4$ au cours d'une succession d'appels indépendants. Y suit donc la loi géométrique $\mathcal{G}(1/4)$, c'est-à-dire que, pour $k \geq 1$,

$$P(U = k) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

On applique la formule du cours pour obtenir l'espérance (on on calcule simplement la somme d'une série géométrique), et on trouve que

$$E(U) = 4.$$

Exercice 7 - Le concierge - *L2/Prépa Hec* - ⋆⋆

Notons p_k la probabilité que la porte soit ouverte au k-ième essai et V_k l'événement "la porte n'est pas ouverte après le k-ième essai". On a

$$p_k = P(V_k^c \cap V_{k-1}) = P(V_{k-1}) - P(V_k),$$

la dernière formule venant du fait que (V_k) est une suite décroissante d'événements. Dans chaque cas, on va calculer $P(V_k)$ en utilisant la formule

$$P(V_k)=P(V_k|V_{k-1})P(V_{k-1}).$$

1. Si V_{k-1} est vraie, au k-ième essai, le concierge choisit au hasard une clef parmi les $n-(k-1)$ qui restent. On a donc

$$P(V_k)=\left(1-\frac{1}{n-k-1}\right)P(V_{k-1})=\frac{n-k}{n-k-1}P(V_{k-1}).$$

   Par une récurrence aisée, on trouve donc que, pour $k\leq n$,

$$P(V_k)=\frac{n-k}{n}$$

   et $P(V_k)=0$ si $k\neq n$. On a donc, pour $1\leq k\leq n$,

$$p_k=\frac{n-k-1}{n}-\frac{n-k}{n}=\frac{1}{n}.$$

   Le nombre moyen d'essais vaut donc

$$\sum_{k=1}^n kp_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k=\frac{n-1}{2}.$$

2. Cette fois, si V_k est vraie, le concierge tire une clef parmi les n du trousseau, et donc

$$P(V_k)=\left(1-\frac{1}{n}\right)P(V_{k-1})=\frac{n-1}{n}P(V_{k-1}).$$

   On obtient cette fois, pour $k\geq 0$,

$$P(V_k)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^k,$$

   puis

$$p_k=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}.$$

   En reconnaissant une loi géométrique de paramètre $1/n$, on trouve que le nombre moyen d'essais nécessaires est

$$\sum_{k=1}^{+\infty}kp_k=n.$$

   Finalement, ce n'est pas si différent !

Exercice 8 - Chaîne de fabrication - *Ecricome* - ⋆⋆

1. Pour un objet pris à la sortie, $P(A) = 0.6$ et $P(B) = 0.4$ Soit $D =$"l'objet est défectueux". On a $P(D|A) = 0.1$ et $P(D|B) = 0.2$ et comme (A, B) est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) \\ &= 0.1 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.4 \\ &= 0.14. \end{aligned}$$

Si l'objet est défectueux, la probababilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A" est $P(A|D)$ que l'on calcule par la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P(A/D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/A)P(A)}{P(D)} \\ &= \frac{0.1 \cdot 0.6}{0.14} = \frac{0.06}{0.14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.
   (a) On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier n : $P(Y = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$. $E(Y) = \lambda = 20$ et $V(Y) = \lambda = 20$
   (b) Quand $Y = n$, X est le **nombre** d'objets défectueux parmi n, qui sont défectueux **indépendemment** les un des autres avec une même probabilité 0.1. Donc $X|Y = n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 0.1)$ et $P[X = k|Y = n] = 0$ si $k > n$ et $P[X = k|Y = n] = \binom{n}{k} 0.1^k 0.9^{n-k}$ si $k \leq n$
   (c) Comme $(Y = n)_{n \in \mathbb{N}}$, est un système complet d'événements on a pour tout entier k :

$$P(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P[X = k|Y = n] P(Y = n)$$

   série convergente dont on calcule la somme partielle en distinguant suivant que $n \geq k$

ou $n<k$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{M} P\left[X=k|Y=n\right]P\left(Y=n\right) &= \sum_{n=0}^{k-1} P\left[X=k|Y=n\right]P\left(Y=n\right) \\
&\quad + \sum_{n=k}^{M} P\left[X=k|Y=n\right]P\left(Y=n\right) \\
&= 0+\sum_{n=k}^{M}\binom{n}{k}0.1^k 0.9^{n-k}\frac{20^n e^{-20}}{n!} \\
&= \left(\frac{0.1}{0.9}\right)^k e^{-20}\sum_{n=k}^{M}\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!n!}\left(0.9\cdot 20\right)^n \\
&= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20}\frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{M}\frac{1}{\left(n-k\right)!}18^n \\
&= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20}\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{M-k}\frac{1}{m!}18^{m+k} \\
&\to \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20}\frac{1}{k!}18^k e^{18}=\frac{2^k e^{-2}}{k!}
\end{aligned}$$

donc $X\hookrightarrow\mathcal{P}\left(2\right)$

Exercice 9 - Un problème chinois ! - *L2* - ⋆⋆

1. Très clairement, puisqu'il y a un seul enfant par couple, $P=1/X$.
2. X est le temps d'attente du premier "succès", avec probabilité de succès égale à $1/2$. On en déduit que X suit une loi géométrique de paramètre $1/2$. En particulier, $\mathbb{P}(X=k)=2^{-k}$.
3. Par définition, on a

$$E(P)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\mathbb{P}(P=1/k)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^{-k}}{k}.$$

   On reconnait alors le développement en série entière de $-\ln(1-x)$ pris en $x=-1/2$, et il vient

$$E(P)=-\ln(1/2)=\ln(2)\simeq 0,69.$$

   C'est très déséquilibré et ceci risque de poser rapidement des problèmes de renouvellement de génération.

Exercice 10 - Minimum et maximum de deux dés - *L2* - ⋆⋆

1. Pour $i=1,\dots,6$, l'événement $X=i$ est réunion disjointe des trois événements suivants :
   – A : $U_1=i$ et $U_2=i$;
   – B : $U_1=i$ et $U_2>i$;
   – C : $U_1>i$ et $U_2=i$.

Par indépendance des variables aléatoires U_1 et U_2, on en déduit que

$$P(A) = \frac{1}{36},\ P(B) = \frac{6-i}{36} \text{ et } P(C) = \frac{6-i}{36}.$$

Il vient $P(X=1) = 11/36$, $P(X=2) = 9/36$, $P(X=3) = 7/36$, $P(X=4) = 5/36$, $P(X=5) = 3/36$, $P(X=6) = 1/36$. On en déduit $E(X) = 91/36$.

2. On a $X+Y = U_1+U_2$ car (U_1,U_2) est une permutation de (X,Y). Il vient $E(X+Y) = E(X)+E(Y) = E(U_1)+E(U_2) = 7$, puisque chaque U_i suit une loi uniforme sur $\{1,\dots,6\}$, son espérance vaut $(6+1)/2 = 7/2$. On en déduit $E(Y) = 161/36$.
3. On a $XY = U_1U_2$. On en déduit

$$E(XY) = E(U_1U_2) = E(U_1)E(U_2)$$

par indépendance de ces deux variables aléatoires. D'où

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1225}{1296}.$$

Exercice 11 - Pile ou face - *Oral ESCP* - ⋆⋆

1. La variable aléatoire T_1 est le temps d'attente du premier pile ; elle suit la loi géométrique de paramètre p, donc d'espérance $1/p$.
2. Notons X_n la variable aléatoire égale à 1 si la partie numéro n amène pile. Les variables X_n sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Soit $(i_1,\dots,i_n) \in \mathbb{N}^n$. L'événement $(A_1 = i_1,\dots,A_n = i_n)$ s'écrit aussi :

$$X_1 = \dots = X_{i_1-1} = 0, X_{i_1} = 1, X_{i_1+1} = \dots = X_{i_1+i_2-1} = 0, X_{i_1+i_2} = 1, \dots, X_{i_1+\dots+i_n} = 1.$$

Donc, en posant $q = 1-p$, on a :

$$P(A_1 = i_1,\dots,A_n = i_n) = q^{i_1-1}pq^{i_2-1}p\dots q^{i_n-1}p.$$

En sommant pour $(i_1,\dots,i_{n-1})$ parcourant $(\mathbb{N}^*)^{n-1}$, on a :

$$P(A_n = i_n) = q^{i_n-1}p.$$

(A_n) suit bien une loi géométrique de paramètre p. De plus l'expression ci-dessus prouve que :

$$P(A_1 = i_1,\dots,A_n = i_n) = P(A_1 = i_1)\dots P(A_n = i_n),$$

ce qui montre que les variables $A_1,\dots,A_n$ sont indépendantes.

Variables discrètes infinies

Exercice 12 - Une certaine variable aléatoire - *Oral ESCP* - ⋆

1. L'événement $X = n$ correspond au déroulement suivant : on a obtenu un et un seul pile lors des $n+1$ premiers tirages, et le $n+2$-ième tirage donne un face. Il y a donc $n+1$ choix pour le premier pile. Ceci choisi, l'événement élémentaire a une probabilité qui vaut $p^2(1-p)^n$. On a donc :
$$P(X = n) = (n+1)p^2(1-p)^n.$$
2. La série définisant $E(X)$ est évidemment convergente, et sa sommation est facile (si elle vous semble difficile, il faut réviser comment faire, par exemple en utilisant les séries entières). On trouve :
$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \frac{2(1-p)}{p}.$$
3. Si $n \geq 1$ est fixé, et $k \in \{0, \dots, n\}$, on a clairement :
$$P(Y = k|X = n) = \frac{1}{n+1}.$$
Par la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(Y = k|X = n)P(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} (n+1)p^2(1-p)^n \frac{1}{n+1} = p(1-p)^k. \end{aligned}$$
On reconnait que $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p. On a donc :
$$E(Y) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}.$$
Ceci peut bien sûr se retrouver par un calcul direct.
4. On a :
$$(Z = h) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[(Y = j) \cap (X = h + j)\right].$$
Cette réunion étant disjointe, il vient :
$$\begin{aligned} P(Z = h) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(Y = j|X = h + j)P(X = h + j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} p^2(1-p)^{h+j} \\ &= p(1-p)^h. \end{aligned}$$
On a ensuite :
$$\begin{aligned} P[(Z = h), (Y = j)] &= P(X = h + j, Y = j) = P(Y = j|X = h + j)P(X = h + j) \\ &= p^2(1-p)^{h+j}. \end{aligned}$$
Ceci est égal à $P[(Z = h), (Y = j)]$. Les variables aléatoires sont indépendantes.

Exercice 13 - Deux fois pile - *L2/ECS* - $\star$

1. On note P_k (resp. F_k) l'événement on obtient pile (resp. face) au $k-$ième lancer. L'événement $(X=2)$ correspond à :

$$(X=2)=P_1P_2 \implies p_1=\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

De même,

$$(X=3)=F_1P_2P_3 \implies p_2=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Pour $(X=4)$, cela se corse un peu !

$$(X=4)=F_1F_2P_3P_4\cup P_1F_2P_3P_4 \implies p_4=\frac{4}{27}.$$

2. On s'inspire du calcul de p_4 : pour obtenir $X=n$, on peut :
   - ou bien avoir obtenu pile au 1er lancer (proba $2/3$). Dans ce cas, on a forcément obtenu face au second lancer (sinon $X=2$), donc avec encore une probabilité de $2/3$. Maintenant, il reste $n-2$ lancers, et le premier "double pile" doit arriver au bout du $n-2$ième. Ceci se produit avec une probabilité valant p_{n-2}.
   - ou bien avoir obtenu face au 1er lancer (proba $1/3$). Il reste $n-1$ lancers où il faut obtenir le premier double pile au bout du $n-1$-ième, ce qui se produit avec une probabilité valant p_{n-1}.

   D'après la formule des probabilités totales, on trouve :

$$p_n=\frac{2}{9}p_{n-2}+\frac{1}{3}p_{n-1}.$$

3. On a une classique formule de récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique $r^2=r/3+2/9$ a pour solution $2/3$ et $-1/3$. On en déduit finalement :

$$p_n=\alpha\left(\frac{2}{3}\right)^n+\beta\left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

On détermine α et β en testant sur les premiers termes. On obtient :

$$p_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\frac{4}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

4. Il est bien connu que pour tout $q\in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}nq^n=\frac{q}{(1-q)^2}.$$

On en déduit :

$$E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}np_n=\frac{17}{4}.$$

Exercice 14 - Loi de Pascal - *L2* - $\star$

Il est d'abord clair que X prend ses valeurs dans $\{r, r+1, \dots, \}$. Soit $k \geq r$. Remarquons que si $X = k$, alors le dernier lancer est un pile. Pour les lancers précédents, on a obtenu $r-1$ fois pile, parmi $k-1$ lancers. Le nombre de tirages correspondant à $X = k$ est donc $\binom{k-1}{r-1}$. La probabilité de chaque lancer est $p^r(1-p)^{r-k}$. On en déduit que :

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}.$$

Exercice 15 - Rangée de spots - *Oral ESCP* - $\star\star$

1. Si le spot reste constamment allumé jusqu'à l'instant n, c'est qu'il y a eu la succession d'événement A_k : "le spot S_1 est éclairé à l'instant k". Par la formule des probabilités composées, on trouve que :
$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_n | A_1 \dots A_{n-1}) \dots P(A_1) = \frac{1}{4^n}.$$
2. Clairement(!), on a $P(X = 1) = 1/4$. D'autre part, $(X = 2)$ est réalisé, soit si le spot S_1 reste allumé à l'instant 1 et le spot S_2 s'allume à l'instant 2, soit si le spot S_3 s'allume à l'instant 1 (et S_2 s'allumera automatiquement à l'instant 2). Ces deux cas sont disjoints, donc :
$$P(X = 2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}.$$
3. Soit $n \geq 3$. S_3 s'allume pour la première fois à l'instant n si et seulement si :
   – Soit S_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n-1$, et S_2 s'allume à l'instant n.
   – Soit S_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n-2$, et S_3 s'allume à l'instant $n-1$.
   – Soit S_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n-3$, et S_4 s'allume à l'instant $n-2$.
   Ces cas étant disjoints, on obtient :
$$\forall n \geq 3,\ P(X = n) = \frac{1}{4^{n-1}}\frac{1}{4} + \frac{1}{4^{n-2}}\frac{1}{4} + \frac{1}{4^{n-3}}\frac{1}{4} = \frac{21}{4^n}.$$
4. La convergence de la série étant évidente, on obtient :
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{5}{8} + 21 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n}{4^n}. \end{aligned}$$
   La somme de la série se calcule en utilisant $\sum_{x \geq 0} x^n = 1/(1-x)$ pour $|x| < 1$, en dérivant cette égalité, et en faisant $x = 1/4$. On obtient finalement :
$$E(X) = \frac{7}{3}.$$

Exercice 16 - Maximiser l'espérance - *Oral ESCP* - ⋆⋆

1. On a $Y(\Omega)=\{1,\dots,n\}$, et par indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2 :
   – si $k\leq a$, $P(Y=k)=P\left((X_1=k)\cap(X_2\leq a)\right)=\frac{1}{n}\times\frac{a}{n}$.
   – si $k>a$, $P(Y=k)=P\left((X_1=k)\cap(X_2\leq a)\right)+P\left((X_2=k)\cap(X_2>a)\right)=\frac{a}{n^2}+\frac{1}{n}$.
   On a bien $a\times\frac{a}{n^2}+(n-a)\times\left(\frac{a}{n^2}+\frac{1}{n}\right)=1$.
2. Le calcul de l'espérance est facile :
$$\begin{aligned}E(Y)&=\sum_{k=1}^{a}k\frac{a}{n^2}+\sum_{k=a+1}^{n}k\frac{a}{n^2}+\sum_{k=a+1}^{n}\frac{k}{n}\\&=\frac{a(n+1)}{2n}+\frac{(a+n+1)(n-a)}{2n}\\&=E(X_1)+\frac{a}{2n}(n-a)\geq E(X_1).\end{aligned}$$
3. On vérifie que :
$$E(Y)=\frac{1}{2n}\left(\frac{5}{4}n^2+n-(a-n/2)^2\right).$$
   Ainsi, $E(Y)$ est maximale pour $|a-n/2|$ le plus petit possible :
   – si n est pair, c'est pour $a=n/2$.
   – si n est impair, c'est pour $a=(n-1)/2$ ou $a=(n+1)/2$.

Exercice 17 - Entropie d'une variable aléatoire - *L3* - ⋆⋆

1. Si X est constante, on a $p_i=1$ pour un i et $p_j=0$ pour $j\neq i$. On en déduit que $H(X)=-1\times\ln(1)=0$.
2. Si X est équirépartie, on a $p_i=1/n$ pour tout i. On en déduit
$$H(X)=\sum_{i=1}^{n}-\frac{\ln(1/n)}{n}=-\ln(1/n)=\ln(n).$$
3. Posons $f(x)=-x\ln(x)$. Cette fonction est concave, car sa dérivée seconde est $f''(x)=-\frac{1}{x}<0$. On a donc
$$\frac{1}{n}f(p_1)+\cdots+\frac{1}{n}f(p_n)\leq f\left(\frac{p_1+\cdots+p_n}{n}\right)\leq f(1/n)$$
   ce qui se traduit encore en
$$\sum_{i=1}^{n}f(p_i)\leq\sum_{i=1}^{n}f(1/n)=\ln n.$$
   Ainsi, on a toujours $H(X)\leq\ln n$ et cette valeur est atteinte quand X est équidistribuée. $H(X)$ mesure le désordre engendré par X. Lorsque X ne prend qu'une seule valeur, son entropie est nulle (pas de désordre). Lorsque la variable est équidistribuée, le désordre est maximal et l'entropie aussi.

Exercice 18 - Une autre expression de l'espérance - *L2/L3/Master Enseignement* - ⋆⋆

1. (a) Pour $n\geq 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n kP(X=k) &= \sum_{k=1}^n k\left(P(X>k-1)-P(X>k)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(k+1-k)P(X>k)-nP(X>n)+P(X>0)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}P(X>k)-nP(X>n).\end{aligned}$$

(b) On a, pour tout entier n,

$$\sum_{k=0}^n kP(X=k)\leq \sum_{k=0}^{+\infty}P(X>k).$$

La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est majorée. C'est que la série converge.

(c) Si X admet une espérance, la série $\sum kP(X=k)$ converge. Mais :

$$0\leq nP(X>n)=n\sum_{k=n+1}^{\infty}P(X=k)\leq \sum_{k=n+1}^{\infty}kP(X=k).$$

Ce dernier terme tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini, comme reste d'une série convergente. Donc :

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X>k).$$

(d) On utilise le même type d'argument :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n k^2P(X=k) &= \sum_{k=0}^n k^2\left(P(X>k-1)-P(X>k)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)P(X>k)-n^2P(X>n).\end{aligned}$$

Si X admet une variance, X admet un moment d'ordre 2, et la série $\sum k^2P(X=k)$ converge. Mais :

$$0\leq n^2P(X>n)=n^2\sum_{k=n+1}^{\infty}P(X=k)\leq \sum_{k=n+1}^{\infty}k^2P(X=k).$$

Ce dernier terme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et donc :

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)P(X>k).$$

2. (a) On a $X \leq k$ si et seulement si les n épreuves ont amené un résultat inférieur ou égal à k, et on a donc :

$$P(X \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n \implies P(X > k) = 1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Quant à la loi de X, on trouve, pour $1 \leq k \leq N$:

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.$$

(b) Par la question précédente :

$$E(X) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

(c) On reconnait ici une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto x^n$, continue sur $[0, 1]$. On a donc, pour N qui tend vers l'infini :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \sim \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

(d) On a :

$$\frac{E(X)}{N} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \to 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$